5) $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ wird erzeugt von den Matrizen $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$.
6) Sei $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ein Gitter in $\mathbb{C}$ und δ der Durchmesser 9(1). Dann gilt

$$\delta(\omega_1, \omega_2) = \max\{|\omega_1 + \omega_2|, |\omega_1 - \omega_2|\}.$$

7) Sei $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ein Gitter in $\mathbb{C}$ mit $\tau := \omega_1/\omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $|\tau| \geq 1$, $|\mathrm{Re}\,\tau| \leq \frac{1}{2}$ (vgl. **3**). Dann gilt

$$\delta(\omega_1, \omega_2) \leq \delta(\omega_1', \omega_2') \quad \text{für jede Basis} \quad (\omega_1', \omega_2') \quad \text{von } \Omega.$$

8) Sei Ω ein Gitter in $\mathbb{C}$ und $C \in \mathbb{R}$. Dann gibt es eine Basis ω_1, ω_2 von Ω mit $\delta(\omega_1, \omega_2) > C$.
9) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ beide positiv. Für $\rho > 0$ sei

$$e(\rho) := \sharp \left\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\,;\ \left(\tfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\tfrac{y}{b}\right)^2 \leq \rho\right\}$$

die Anzahl der ganzen Punkte innerhalb der Ellipse. Dann gibt es ein $c > 0$, so dass

$$|e(\rho) - ab\pi\rho^2| \leq c\rho \quad \text{für alle } \rho \geq 1.$$

10) Ein anderer Beweis des Konvergenz-Lemmas 9 verläuft wie folgt:
(i) Es genügt, das Gitter $\Omega = \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}$ zu betrachten.
(ii) Sei $\alpha > 1$. Dann gibt es $0 < c' < c$, so dass für alle $0 \neq m \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$c' \cdot |m|^{1-\alpha} \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} (m^2 + n^2)^{-\alpha/2} \leq c \cdot |m|^{1-\alpha}.$$

(iii) Man folgere die Behauptung des Konvergenz-Lemmas aus (i) und (ii).
11) Sei $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ein Gitter in $\mathbb{C}$. Dann gilt für $\alpha > 2$

$$\sum_{0 \neq \omega \in \Omega} |\omega|^{-\alpha} = \sum_{0 \neq g \in \mathbb{Z}^2} (g^t S g)^{-\alpha/2}, \quad S = \begin{pmatrix} |\omega_1|^2 & \mathrm{Re}\,(\omega_1 \overline{\omega_2}) \\ \mathrm{Re}\,(\omega_1 \overline{\omega_2}) & |\omega_2|^2 \end{pmatrix}.$$

12) Sei $k \in \mathbb{Z}$, $k > 2$. Es gilt $G_k(\Omega) = 0$, falls $\Omega = \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}$ und $k \not\equiv 0 \pmod 4$ oder $\Omega = \mathbb{Z}\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) + \mathbb{Z}$ und $k \not\equiv 0 \pmod 6$.

§2. Der Körper der elliptischen Funktionen

Bisher ist es überhaupt nicht klar, ob es zu einem gegebenen Gitter Ω in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktionen f gibt mit $\mathrm{Per}\, f = \Omega$ (vgl. Bemerkung 1.3c). Unter der Annahme der Existenz einer geeigneten solchen Funktion gelingt überraschenderweise schon die Beschreibung aller derartigen Funktionen. Der Existenz-Beweis wird dann in § 3 nachgeliefert.

In diesem Paragrafen sei $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ stets ein Gitter in $\mathbb{C}$.

1. Erste Eigenschaften elliptischer Funktionen. Eine meromorphe Funktion f auf $\mathbb{C}$ heißt *elliptisch* oder *doppelt–periodisch* bezüglich Ω, wenn Ω in der Menge $\mathrm{Per}\, f$ der Perioden von f (vgl. 1.2) enthalten ist: $\Omega \subset \mathrm{Per}\, f$. Das bedeutet also

(1) $\quad D_f + \omega = D_f \quad$ für alle $\omega \in \Omega$,

(2) $\quad f(z + \omega) = f(z) \quad$ für alle $\omega \in \Omega$ und $z \in \mathbb{C} \setminus D_f$.

Interpretiert man hier (2) derart, dass die Gleichung für alle z und ω gelten möge, für welche beide Seiten sinnvoll sind, so ist (1) eine Folge von (2). Die Bedingungen (1) und (2) sind sicher erfüllt, wenn sie für eine Basis von Ω richtig sind. Es bezeichne $\mathcal{K}(\Omega)$ die Menge der bezüglich Ω elliptischen Funktionen.

Für $0 \neq f \in \mathcal{M}$ und $c \in \mathbb{C}$ hat man bekanntlich (R. REMMERT, G. SCHUMACHER [2002], 12.1.3) eine LAURENT–*Entwicklung* der Form

$$f(z) = \sum_{n \geq m} a_n (z-c)^n \ , \quad a_m \neq 0, \quad m \in \mathbb{Z},$$

die in einer punktierten Umgebung von c normal, speziell also lokal-gleichmäßig konvergiert. Hier sind die *Ordnung von* f *in* c wie in 1.1(3) durch $\operatorname{ord}_c f := m$ und das *Residuum von* f *in* c durch $\operatorname{res}_c f := a_{-1}$ erklärt.

Für $f \in \mathcal{K}(\Omega)$, $\omega \in \Omega$ und z aus einer geeigneten Umgebung von $c+\omega$ hat man

$$f(z) = f(z-\omega) = \sum_{n \geq m} a_n (z - [c+\omega])^n$$

und es folgt daher

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{ord}_{c+\omega} f = \operatorname{ord}_c f \quad \text{sowie} \quad \operatorname{res}_{c+\omega} f = \operatorname{res}_c f.$$

Damit ist speziell mit c auch $c+\omega$, $\omega \in \Omega$, ein Pol (bzw. eine Nullstelle oder eine w-Stelle) von $f \in \mathcal{K}(\Omega)$. Da sich die Pole in kompakten Mengen nicht häufen können, hat man zusammengefasst die

Proposition. *Die elliptischen Funktionen $\mathcal{K}(\Omega)$ bezüglich Ω bilden einen Unterkörper des Körpers $\mathcal{M}$ aller meromorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$, der die konstanten Funktionen enthält. Jedes $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ hat in jedem Periodenparallelogramm nur endlich viele Pole.*

Ein Blick auf (1) und (2) ergibt das einfache, aber wichtige

Lemma. *Mit $f(z)$ gehören auch*

$$f'(z) \quad \textit{und} \quad g(z) := f(nz+w) \quad \textit{mit} \quad 0 \neq n \in \mathbb{Z},\ w \in \mathbb{C} \text{ fest},$$

zu $\mathcal{K}(\Omega)$.

2. Die vier Sätze von LIOUVILLE. Im Jahre 1847 bemerkte J. LIOUVILLE (1809–1882), dass für elliptische Funktionen erhebliche, zunächst nicht erkennbare Einschränkungen gelten (J. Reine Angew. Math. **88**, 277–310 (1880)):

Satz A. *Ist $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ holomorph, dann ist f konstant.*

Beweis. Sei P ein Periodenparallelogramm. Da der Abschluss von P kompakt ist, gibt es ein $C > 0$ mit $|f(z)| \leq C$ für $z \in P$. Ist $z \in \mathbb{C}$ beliebig, so gibt es nach Proposition 1.6A ein $\omega \in \Omega$ mit $z + \omega \in P$. Damit folgt

$$|f(z)| = |f(z+\omega)| \leq C,$$

so dass f auf $\mathbb{C}$ beschränkt ist. Nach dem klassischen Satz von Liouville (R. Remmert, G. Schumacher [2002], Satz 8.3.5) ist f konstant. □

Satz B. *Ist $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ und P ein Periodenparallelogramm, dann gilt*

$$\sum_{c \in P} \mathrm{res}_c f = 0. \tag{1}$$

Beweis. Wegen 1(3) und Proposition 1.6A ist die Summe (1) endlich und unabhängig von der Wahl von P. Sei also u so gewählt, dass auf dem Rand ∂P von P keine Singularitäten liegen.
Man integriert nun f über den Rand ∂P. Nach dem Residuensatz gilt dann

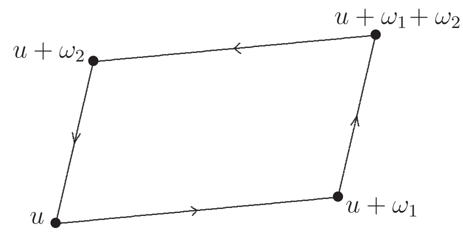

Abb. 7: Integrationsweg

$$\pm\, 2\pi i \sum_{c \in P} \mathrm{res}_c f = \int_u^{u+\omega_1} f(z)\,dz + \int_{u+\omega_1}^{u+\omega_1+\omega_2} f(z)\,dz + \int_{u+\omega_1+\omega_2}^{u+\omega_2} f(z)\,dz + \int_{u+\omega_2}^{u} f(z)\,dz$$

$$= \int_u^{u+\omega_1} (f(z) - f(z+\omega_2))dz + \int_{u+\omega_2}^{u} (f(z) - f(z+\omega_1))dz\ .$$

Wegen $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ ist die rechte Seite aber Null. □

Satz C. *Ist $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ nicht konstant und P ein Periodenparallelogramm, dann gilt für jedes $w \in \mathbb{C}$*

$$\sum_{c \in P} \mathrm{ord}_c(f - w) = 0, \tag{2}$$

d. h., wenn man mit den entsprechenden Vielfachheiten zählt, ist

$$\begin{aligned} \textit{Anzahl der Pole von } f &= \textit{Anzahl der } w\textit{-Stellen von } f \\ &= \textit{Anzahl der Nullstellen von } f \end{aligned}$$

in P. Speziell nimmt jedes nicht-konstante $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ in P jeden Wert an.

Beweis. Nach Lemma 1 ist

$$g(z) := \frac{f'(z)}{f(z) - w}$$

wieder eine elliptische Funktion bezüglich Ω und es gilt $\mathrm{res}_c g = \mathrm{ord}_c(f - w)$. Damit folgt die Behauptung aus Satz B. Weil f nicht konstant ist, besitzt $f - w$ nach (2) eine Nullstelle in P, da $f - w$ nach Satz A und 1(3) mindestens einen Pol in P hat. □

Satz D. *Ist* $0 \neq f \in \mathcal{K}(\Omega)$ *und* P *ein Periodenparallelogramm, so gilt*

$$\sum_{c \in P} (\mathrm{ord}_c\, f) \cdot c \in \Omega. \tag{3}$$

Beweis. Man wendet die in Satz B benutzte Methode an auf das Integral

$$2\pi i \sum_{c \in P} (\mathrm{ord}_c\, f) \cdot c = \int\limits_{\partial P} z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

$$= \pm \left(\int\limits_u^{u+\omega_1} z\frac{f'(z)}{f(z)} - (z+\omega_2)\frac{f'(z+\omega_2)}{f(z+\omega_2)} dz + \int\limits_{u+\omega_2}^{u} z\frac{f'(z)}{f(z)} - (z+\omega_1)\frac{f'(z+\omega_1)}{f(z+\omega_1)} dz \right)$$

$$= \pm \left(\omega_1 \int\limits_u^{u+\omega_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \omega_2 \int\limits_u^{u+\omega_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right).$$

Wegen $f(u) = f(u + \omega_j)$ gilt

$$\int\limits_u^{u+\omega_j} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in 2\pi i \mathbb{Z} \quad \text{für} \quad j = 1, 2,$$

also (3). □

Nach Satz B gibt es keine elliptischen Funktionen mit nur einem Pol 1. Ordnung in P. Entweder muss man also wenigstens zwei Pole 1. Ordnung oder einen Pol 2. Ordnung mit Residuum Null zulassen. Beide Wege wurden von K.T.W. Weierstrass beschritten, wir betrachten zunächst nur den zweiten Fall.

Zählt man die Null- und Polstellen eines nicht-konstanten $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ mit den Vielfachheiten, dann gibt es nach Satz C Punkte $a_1, \ldots, a_r$ und $b_1, \ldots, b_r$ aus P, so dass f genau in $a_1, \ldots, a_r$ Nullstellen und genau in $b_1, \ldots, b_r$ Pole hat. Dabei wird die Vielfachheit jeweils durch die Anzahl der Wiederholungen der Punkte angegeben. Damit schreibt sich die Aussage von Satz D mit 1.7(1) in der Form

$$a_1 + \cdots + a_r \equiv b_1 + \cdots + b_r \, (\mathrm{mod}\ \Omega). \tag{4}$$

Diese Relation war N.H. Abel bereits 1826 bekannt (*Œuvres complètes I*, 145–211). Nach einem Vorschlag von Jacobi heißt (4) daher auch Abel*sche Relation.* Man nennt r die *Ordnung* der elliptischen Funktion f. Die Sätze A und B besagen, dass eine elliptische Funktion der Ordnung 0 konstant ist und dass es keine elliptische Funktion der Ordnung 1 gibt. Wir werden in **6.3** sehen, dass $r \geq 2$ und (4) auch hinreichend für die Existenz einer elliptischen Funktion mit vorgegebenen Null- und Polstellen sind.

3. Der Existenz-Satz und erste Folgerungen. Als erste Konsequenz der Liouvilleschen Sätze zeigt es sich in diesem und im nächsten Abschnitt, dass