Beweis. Man vergleicht die Mengen

$$K_\rho := \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| \le \rho\} \quad \text{und} \quad M_\rho := \bigcup_{\omega\in\Omega, |\omega|\le\rho} \diamond(\omega;\omega_1,\omega_2)\,.$$

Aus der Definition von δ folgt

$$K_{\rho-\delta} \subset M_\rho \subset K_{\rho+\delta}\,.$$

Der Übergang zur Fläche liefert die Behauptung, denn es gilt

$$\text{Fläche } K_\rho = \pi\rho^2 \quad \text{und} \quad \text{Fläche } M_\rho = \operatorname{vol}\Omega \cdot A_\rho(\Omega)\,. \qquad \square$$

Damit erhalten wir das

Konvergenz-Lemma. *Die Reihe*

$$\sum_{0\ne\omega\in\Omega} |\omega|^{-\alpha}$$

konvergiert genau dann, wenn $\alpha > 2$.

Beweis. Sei zunächst $\alpha > 2$ und $\emptyset \ne E \subset \Omega \setminus \{0\}$ endlich sowie $M := \max\{|\omega|\,;\ \omega \in E\}$. Aus dem Satz erhält man ein $c_2 > 0$ mit

$$A_{n+1}(\Omega) - A_n(\Omega) \le \frac{\pi}{\operatorname{vol}\Omega} \cdot [(n+1+\delta)^2 - (n-\delta)^2] \le c_2 n$$

für alle $n \ge \delta$. Mit

$$c_1 := \sum_{0\ne\omega\in\Omega, |\omega|\le\delta+1} |\omega|^{-\alpha}$$

ergibt sich (vgl. W. Walter [1997; I], 5.10)

$$\sum_{\omega\in E} |\omega|^{-\alpha} \le c_1 + \sum_{n\in\mathbb{N}, \delta<n<M} (A_{n+1}(\Omega) - A_n(\Omega))n^{-\alpha} \le c_1 + c_2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{1-\alpha} =: C < \infty\,.$$

Trivialerweise divergiert die Reihe für $\alpha \le 0$. Sei $0 < \alpha \le 2$ und $N \in \mathbb{N}$, $N > 2\delta$. Aus dem Satz erhält man ein $c_3 > 0$ mit

$$A_{kN}(\Omega) - A_{(k-1)N}(\Omega) \ge \frac{\pi}{\operatorname{vol}(\Omega)} \cdot \left[(kN-\delta)^2 - ((k-1)N+\delta)^2\right] \ge c_3 k$$

für alle $k \in \mathbb{Z}, k \ge 2$. Sei $E_n = \{\omega \in \Omega\ ;\ 0 < |\omega| \le nN\}$. Dann gilt

$$\sum_{\omega\in E_n} |\omega|^{-\alpha} \ge \sum_{k=2}^{n} (A_{kN}(\Omega) - A_{(k-1)N}(\Omega)) \cdot (kN)^{-\alpha} \ge c_3 N^{-\alpha} \cdot \sum_{k=2}^{n} k^{1-\alpha}\,.$$

Weil die Reihe $\sum_{k>1} k^{1-\alpha}$ für $\alpha \le 2$ divergiert (vgl. W. Walter [1997; I], 5.10), divergiert auch $\sum_{0\ne\omega\in\Omega} |\omega|^{-\alpha}$ für $\alpha \le 2$. $\square$

Eine andere Version dieses Konvergenz-Lemmas findet man in III.2.1.

Damit sind die so genannten EISENSTEIN-*Reihen*

$$G_k := G_k(\Omega) := \sum_{0\neq\omega\in\Omega} \omega^{-k} \quad \text{für } k\in\mathbb{Z},\ \ k\geq 3 \tag{2}$$

absolut konvergent. Da mit ω auch $-\omega$ zu Ω gehört, erhält man mit einer Umordnung wegen Satz 8 sofort $G_k = (-1)^k \cdot G_k$, also die

Proposition. *Es gilt $G_k(\Omega) = 0$ für ungerades $k \geq 3$.*

Zunächst kann man nicht ausschließen, dass *alle* G_k gleich Null sind, wenn das auch den unbefangenen Leser wohl wundern würde. Wir werden erst in Satz 4.2 sehen, dass alle G_k, $k \geq 4$ gerade, i. A. von Null verschieden sind.

Es gehört zu den faszinierenden Ergebnissen der noch zu entwickelnden Theorie der elliptischen Funktionen, dass diese EISENSTEIN-Reihen Polynome über $\mathbb{Q}$ in G_4 und G_6 sind (vgl. Korollar 3.3E). Zum Beispiel gilt $7G_8 = 3G_4^2$ und $11G_{10} = 5G_4G_6$. Dies steht in Analogie zu bekannten Ergebnissen über die RIEMANN*sche Zetafunktion*

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\,, \quad s\in\mathbb{R},\ \ s>1.$$

Betrachtet man nämlich statt eines Gitters Ω eine Untergruppe „vom Rang 1“ , also z. B. $\Omega = \mathbb{Z}$, dann erhält man an Stelle von (2) die Gitterinvarianten $F_k := 2\zeta(k)$, $k \geq 2$ gerade, die nach L. EULER bekanntlich rationale Vielfache von π^k sind, sich also als Monome in F_2 schreiben lassen:

$$5F_4 = F_2^2\,, \quad 35F_6 = 2F_2^3.$$

Man vergleiche hierzu M. KOECHER [1987], V.5.5.

Aufgaben. 1) Sei $0 \neq \omega \in \mathbb{C}$.
a) Es gibt eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von linear unabhängigen ganzen Funktionen mit Periodenmengen $\operatorname{Per} f_n \supset \mathbb{Z}\omega$.
b) Die Menge der ganzen Funktionen f mit $\operatorname{Per} f \supset \mathbb{Z}\omega$ ist ein Ring, der zum Ring der holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ isomorph ist.
2) Sei $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ein Gitter in $\mathbb{C}$. Für $\omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \in \Omega$ sind äquivalent:
(i) Es gibt ein $\omega' \in \Omega$ mit $\Omega = \mathbb{Z}\omega + \mathbb{Z}\omega'$.
(ii) m_1 und m_2 sind teilerfremd.
(iii) Ist $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$, so gilt $\frac{1}{n}\omega \notin \Omega$.
3) Man bestimme $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}$, nicht alle Null, so dass

$$|m_1\sqrt{2} + m_2(\sqrt{3} + i\sqrt{5}) + m_3 i\sqrt{7}| < 1 \tag{$*$}$$

und $m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$ minimal unter der Bedingung $(*)$ ist.
4) Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $d < 0$ quadratfrei, ein imaginär-quadratischer Zahlkörper der Diskriminante D und Ω der Ring der ganzen Zahlen, d. h. $\Omega = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\frac{1+\sqrt{d}}{2}$, $D = d$, falls $d \equiv 1 \pmod 4$, und sonst $\Omega = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{d}$, $D = 4d$. Dann ist Ω ein Gitter in $\mathbb{C}$ und die Fläche eines Periodenparallelogramms ist $\frac{1}{2}\sqrt{|D|}$.

Satz D. *Ist $0 \neq f \in \mathcal{K}(\Omega)$ und P ein Periodenparallelogramm, so gilt*

$$\sum_{c \in P} (\mathrm{ord}_c f) \cdot c \in \Omega. \tag{3}$$

Beweis. Man wendet die in Satz B benutzte Methode an auf das Integral

$$2\pi i \sum_{c \in P} (\mathrm{ord}_c f) \cdot c = \int\limits_{\partial P} z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

$$= \pm \left(\int\limits_{u}^{u+\omega_1} z\frac{f'(z)}{f(z)} - (z+\omega_2)\frac{f'(z+\omega_2)}{f(z+\omega_2)} dz + \int\limits_{u+\omega_2}^{u} z\frac{f'(z)}{f(z)} - (z+\omega_1)\frac{f'(z+\omega_1)}{f(z+\omega_1)} dz \right)$$

$$= \pm \left(\omega_1 \int\limits_{u}^{u+\omega_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \omega_2 \int\limits_{u}^{u+\omega_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right).$$

Wegen $f(u) = f(u + \omega_j)$ gilt

$$\int\limits_{u}^{u+\omega_j} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in 2\pi i \mathbb{Z} \quad \text{für} \quad j = 1, 2,$$

also (3). □

Nach Satz B gibt es keine elliptischen Funktionen mit nur einem Pol 1. Ordnung in P. Entweder muss man also wenigstens zwei Pole 1. Ordnung oder einen Pol 2. Ordnung mit Residuum Null zulassen. Beide Wege wurden von K.T.W. WEIERSTRASS beschritten, wir betrachten zunächst nur den zweiten Fall.

Zählt man die Null- und Polstellen eines nicht-konstanten $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ mit den Vielfachheiten, dann gibt es nach Satz C Punkte $a_1, \ldots, a_r$ und $b_1, \ldots, b_r$ aus P, so dass f genau in $a_1, \ldots, a_r$ Nullstellen und genau in $b_1, \ldots, b_r$ Pole hat. Dabei wird die Vielfachheit jeweils durch die Anzahl der Wiederholungen der Punkte angegeben. Damit schreibt sich die Aussage von Satz D mit 1.7(1) in der Form

$$a_1 + \cdots + a_r \equiv b_1 + \cdots + b_r \,(\mathrm{mod}\ \Omega). \tag{4}$$

Diese Relation war N.H. ABEL bereits 1826 bekannt (*Œuvres complètes I*, 145–211). Nach einem Vorschlag von JACOBI heißt (4) daher auch ABEL*sche Relation.* Man nennt r die *Ordnung* der elliptischen Funktion f. Die Sätze A und B besagen, dass eine elliptische Funktion der Ordnung 0 konstant ist und dass es keine elliptische Funktion der Ordnung 1 gibt. Wir werden in **6.3** sehen, dass $r \geq 2$ und (4) auch hinreichend für die Existenz einer elliptischen Funktion mit vorgegebenen Null- und Polstellen sind.

3. Der Existenz-Satz und erste Folgerungen. Als erste Konsequenz der LIOUVILLEschen Sätze zeigt es sich in diesem und im nächsten Abschnitt, dass man allein aus der Annahme der Existenz *einer geeigneten* elliptischen Funktion eine Beschreibung aller elliptischen Funktionen folgern kann. Es sind dabei keine weiteren analytischen Schlüsse erforderlich. Dazu werden lediglich die LIOUVILLEschen Sätze angewendet!

Existenz-Satz. *Es gibt eine elliptische Funktion $\wp = \wp_\Omega$, die genau in jedem Gitterpunkt von Ω einen Pol 2. Ordnung hat und sonst holomorph ist. Ihre* LAURENT*-Reihe bei 0 hat die Form*

$$\wp(z) = z^{-2} + a_1 z + \ldots . \tag{1}$$

Der *Beweis* wird bis zum nächsten Paragrafen zurückgestellt (vgl. **3.1**). Nach 1(3) ist klar, dass $\wp$ an allen Polen das Residuum Null hat. Wegen Satz 2A ist $\wp$ als elliptische Funktion durch (1) eindeutig bestimmt. Man nennt $\wp$ die WEIERSTRASSsche *$\wp$–Funktion* (zum Gitter Ω).

Proposition. a) *$\wp$ ist eine gerade Funktion, d. h. $\wp(-z) = \wp(z)$. Es gilt $a_1 = 0$ in* (1).
b) *$\wp'$ ist eine ungerade Funktion, die genau an allen Gitterpunkten von Ω Pole 3. Ordnung hat und sonst holomorph ist.*

Beweis. a) Die elliptische Funktion $f(z) := \wp(-z) - \wp(z)$ ist nach (1) in 0 und daher überall holomorph. Nach Satz 2A ist f konstant und somit 0 nach (1).
b) Die Behauptung folgt aus a) und dem Existenz-Satz. □

Damit können wir schon alle Nullstellen von $\wp'$ angeben.

Lemma A. *Ist $\omega \in \Omega$, aber $\omega/2 \notin \Omega$, dann ist $\omega/2$ eine einfache Nullstelle von $\wp'$. Jede Nullstelle von $\wp'$ hat umgekehrt diese Form.*

Beweis. Da $\wp'$ eine ungerade elliptische Funktion ist, hat man

$$\wp'(z + \omega) = \wp'(z) = -\wp'(-z).$$

Ist $\omega/2$ kein Pol von $\wp$ und $\wp'$, d. h. $\omega/2 \notin \Omega$, dann darf man $z = -\omega/2$ setzen und erhält

$$\wp'(\omega/2) = -\wp'(\omega/2), \quad \text{also} \quad \wp'(\omega/2) = 0.$$

Sei ω_1, ω_2 eine Basis von Ω. Im Periodenparallelogramm $P = \Diamond(\omega_1, \omega_2)$ hat $\wp'$ dann die Nullstellen

$$\omega_1/2\ ,\ \omega_2/2\ ,\ (\omega_1 + \omega_2)/2\ . \tag{$*$}$$

Nach (1) hat $\wp'$ in P nur einen Pol 3. Ordnung bei 0. Gemäß Satz 2C ist die Anzahl aller Nullstellen von $\wp'$ in P (gezählt mit ihren Vielfachheiten) gleich 3. Die Nullstellen ($*$) sind daher einfach und es sind alle Nullstellen von $\wp'$ in P. Ist nun z eine beliebige Nullstelle von $\wp'$, so existiert ein $\omega' \in \Omega$ mit $z - \omega' \in P$. Dann ist aber $z - \omega'$ einer der Punkte ($*$) und somit z von der Form $\omega/2$ mit $\omega \in \Omega$, aber $\omega/2 \notin \Omega$. □

11) Man betrachte $f(z)$ aus Bemerkung 3c und berechne $f(w)$ sowie die Residuen von f an den Stellen $z=0$ und $z=-w$.
12) Sind $a_0,\dots,a_n\in\mathbb{C}, a_1=0$, so existiert genau ein $f\in\mathcal{K}(\Omega)$ mit $D_f\subset\Omega$ und der LAURENT–Entwicklung $a_nz^{-n}+\ldots+a_0+\ldots$ um 0.
13) Sei ω_1,ω_2 eine Basis des Gitters Ω und $f\in\mathcal{K}(2\Omega)$. Dann gehört

$$g(z):=f(z)+f(z+\omega_1)+f(z+\omega_2)+f(z+\omega_1+\omega_2)$$

zu $\mathcal{K}(\Omega)$. Welche elliptische Funktion entsteht, wenn f die zugehörige $\wp$-Funktion ist?
14) Seien $a,b\in\mathbb{C}$. Es gibt genau dann eine elliptische Funktion $f\in\mathcal{K}(\Omega)$, die in a und b holomorph ist und $f(a)\neq f(b)$ erfüllt, wenn $a\not\equiv b\,(\mathrm{mod}\ \Omega)$.
15) Es existiert kein $f\in\mathcal{K}(\Omega)$ mit $\mathcal{K}(\Omega)=\mathbb{C}(f)$.
16) Man gebe eine invariante (d. h. von 4(1) unabhängige) Beschreibung der GALOIS–Gruppe der Körpererweiterung $\mathcal{K}(\Omega)\supset\mathbb{C}(\wp)$ an.

§3. Die WEIERSTRASSsche $\wp$-Funktion

In diesem Paragrafen sei $\Omega=\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2$ stets ein Gitter in $\mathbb{C}$.

1. Konstruktions-Satz für die $\wp$-Funktion. Für spätere Zwecke formulieren wir die Aussage gleich etwas allgemeiner. Dazu benötigen wir die

Proposition. *Sei $K\subset\{(\omega_1,\omega_2)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}\,;\ \omega_2\neq 0,\quad \omega_1/\omega_2\notin\mathbb{R}\}$ ein Kompaktum. Dann gibt es positive Konstanten α und β, so dass*

$$\alpha\cdot|m_1i+m_2|\le|m_1\omega_1+m_2\omega_2|\le\beta\cdot|m_1i+m_2|$$

für alle $m_1,m_2\in\mathbb{R}$ und $(\omega_1,\omega_2)\in K$.

Beweis. Aus Homogenitätsgründen darf man $m_1^2+m_2^2=1$, also $|m_1i+m_2|=1$ voraussetzen. Die stetige Funktion $(\omega_1,\omega_2,m_1,m_2)\mapsto|m_1\omega_1+m_2\omega_2|$ nimmt auf der kompakten Menge $K\times\{(m_1,m_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\ ;\ m_1^2+m_2^2=1\}$ ihr Minimum α und ihr Maximum β an. Weil ω_1,ω_2 über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind, gilt stets $m_1\omega_1+m_2\omega_2\neq 0$ für alle $(0,0)\neq(m_1,m_2)$. Also sind α und β positiv. □

Als Anwendung erhalten wir den

Konvergenz–Satz für die $\wp$-Funktion. *Die Reihe*

$$\wp(z;\omega_1,\omega_2):=z^{-2}+\sum_{0\neq\omega\in\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2}\left((z-\omega)^{-2}-\omega^{-2}\right)\tag{1}$$

konvergiert absolut gleichmäßig auf jedem Kompaktum in

$$\{(z,\omega_1,\omega_2)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}\,;\ \omega_2\neq 0,\ \omega_1/\omega_2\notin\mathbb{R},\ z\notin\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2\}\ .\tag{2}$$

Beweis. Sei K eine kompakte Teilmenge von (2). Wir wählen ein $\rho>0$ und ein Kompaktum $K'\subset\{(\omega_1,\omega_2)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}\ ;\ \omega_2\neq 0,\ \omega_1/\omega_2\notin\mathbb{R}\}$, so dass

$$K\subset K_\rho\times K'\,,\ K_\rho=\{z\in\mathbb{C}\,;|z|\le\rho\}\,.$$

Zu K' wählt man α nach der Proposition. Dann gilt für alle $(z, \omega_1, \omega_2) \in K$ und $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}$ mit $|m_1 i + m_2| \geq (\rho + 1)/\alpha$ auch

$$|\omega| \geq \rho + 1 \quad \text{für} \quad \omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$$

und

$$\begin{aligned} \Big|\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\Big| = \Big|\frac{2z\omega - z^2}{\omega^2(z-\omega)^2}\Big| &= \Big|\frac{2 - z/\omega}{(1-z/\omega)^2}\Big| \cdot \frac{|z|}{|\omega|^3} \\ &\leq \frac{3}{\big(1-\rho/(\rho+1)\big)^2} \cdot \frac{\rho}{|\omega|^3} \leq \frac{3\rho(\rho+1)^2}{\alpha^3 \cdot |m_1 i + m_2|^3}\,. \end{aligned}$$

Da nur endlich viele Paare $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $|m_1 i + m_2| \leq (\rho + 1)/\alpha$ existieren, folgt die Behauptung aus der absoluten Konvergenz der EISENSTEIN-Reihe $G_3(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z})$ nach dem Konvergenz–Lemma 1.9. □

Für ein festes Gitter Ω erhält man analog das

Lemma. *Für $k \in \mathbb{N}, k \geq 3$, konvergiert die Reihe*

$$\sum_{\omega \in \Omega} (z - \omega)^{-k}$$

auf jedem Kompaktum in $\mathbb{C} \setminus \Omega$ absolut gleichmäßig.

Nun erhalten wir den angekündigten

Konstruktions-Satz für die $\wp$-Funktion. *Die Reihe*

$$(3) \qquad \wp(z) := \wp_\Omega(z) := z^{-2} + \sum_{0 \neq \omega \in \Omega} \big((z-\omega)^{-2} - \omega^{-2}\big)\ ,\ z \in \mathbb{C} \setminus \Omega\,,$$

konvergiert in jedem Kompaktum von $\mathbb{C}$, das keinen Gitterpunkt enthält, absolut gleichmäßig. Die Funktion $\wp$ ist eine gerade elliptische Funktion bezüglich Ω, sie hat in den Gitterpunkten von Ω Pole 2. Ordnung mit Residuum Null und ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Die LAURENT*-Reihe bei 0 hat die Form*

$$(4) \qquad \wp(z) = z^{-2} + a_2 z^2 + \ldots .$$

Damit ist zugleich der Beweis des Existenz-Satzes 2.3 gegeben.

Man nennt $\wp(z)$ die WEIERSTRASS*sche* $\wp$*-Funktion* (zum Gitter Ω). Die Idee, eine elliptische Funktion durch eine Summe über alle Gitterpunkte zu definieren und so die doppelte Periodizität augenscheinlich zu machen, geht auf F.G.M. EISENSTEIN (1823–1852) und K.T.W. WEIERSTRASS (1815–1897) zurück. Man vergleiche hierzu die historische Anmerkung in **7**. Nachschriften kann man entnehmen, dass sich in WEIERSTRASS' Vorlesungen das „WEIERSTRASS $\wp$" allmählich aus einem gewöhnlichen p entwickelt hat.

Beweis. Zur Abkürzung setze man

$$f_\omega(z) := (z-\omega)^{-2} - \omega^{-2} \ \text{ für } \ 0 \neq \omega \in \Omega \ \text{ und } \ K_\rho := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| \leq \rho\}\ ,\ \rho > 0.$$

Die absolute, kompakt gleichmäßige Konvergenz der Reihe (3) folgt bereits aus dem Konvergenz-Satz.

Behauptung 1. *Die Reihe* (3) *stellt eine in* $\mathbb{C}$ *meromorphe Funktion dar, die genau in den Punkten von* Ω *Pole* 2. *Ordnung mit Residuum Null hat.*

Zum *Beweis* sei $\rho > 0$. Es folgt

$$\wp(z) = z^{-2} + \sum_{|\omega|<\rho+1} f_\omega(z) + \sum_{|\omega|\geq\rho+1} f_\omega(z).$$

Hier ist die erste endliche Summe meromorph auf K_ρ, während die zweite nach dem Konvergenz-Satz holomorph auf K_ρ ist. Also hat $\wp|_{K_\rho}$ genau in den Punkten $\Omega \cap K_\rho$ Pole 2. Ordnung mit Residuum 0. □

Behauptung 2. $\wp$ *ist eine gerade Funktion und es gilt* (4).

Zum *Beweis* ersetzt man ω durch $-\omega$ in der Summe (3). Wegen der absoluten Konvergenz folgt $\wp(-z) = \wp(z)$. Nun beachtet man $f_\omega(0) = 0$ für $\omega \neq 0$ und sieht, dass die LAURENT-Reihe bei 0 das konstante Glied 0 hat. □

Behauptung 3. *Es gilt* $\wp(z+\omega) = \wp(z)$ *für alle* $\omega \in \Omega$ *und* $z \in \mathbb{C}\backslash\Omega$.

Zum *Beweis* hat man nach dem Konvergenz-Satz

$$\wp'(z) = -2 \cdot \sum_{\omega\in\Omega} (z-\omega)^{-3}\ ,\ z \in \mathbb{C}\setminus\Omega,$$

und diese Reihe ist nach dem Lemma absolut konvergent. Es folgt $\wp'(z+\omega) = \wp'(z)$ für $\omega \in \Omega$. Ist daher ω_1, ω_2 eine Basis von Ω, so gilt $\wp(z+\omega_j) = \wp(z) + C_j$ mit Konstanten C_j für $j = 1,2$. Für $z := -\omega_1/2$ bzw. $z = -\omega_2/2$ folgt $C_1 = C_2 = 0$, da $\wp$ gerade ist. Damit gilt $\wp(z+\omega_j) = \wp(z)$ für $j = 1,2$ und $\wp$ hat alle $\omega \in \Omega$ als Perioden. □

Bemerkungen. a) In Kenntnis des Satzes von MITTAG–LEFFLER (vgl. R. REMMERT [1995], Satz 6.1.3) stellt man fest, dass man hier einen Beweis jenes Satzes in einem Spezialfall wiederholt hat. Historisch ist der Satz von MITTAG–LEFFLER aber umgekehrt nach dem Vorbild der WEIERSTRASSschen Konstruktion der $\wp$-Funktion modelliert worden.
b) In der obigen Behauptung 3 kann der Umweg über $\wp'$ nicht ohne zusätzliche Überlegungen vermieden werden. Wir verdanken Herrn J. ELSTRODT den Hinweis auf einen direkten Beweis, der auf einer genauen Betrachtung der durch Differenzbildung aus (3) für $\wp(z+\omega) - \wp(z)$ entstehenden Reihe beruht. Man vergleiche hierzu H. HANCOCK ([1910], Art. 270).

2. Die LAURENT-Entwicklung. Wie in 1.9(2) betrachtet man die EISENSTEIN-Reihe

$$(1) \qquad G_k := G_k(\Omega) := \sum_{0 \neq \omega \in \Omega} \omega^{-k} \quad \text{für gerades } k \geq 4.$$

Nach Proposition 1.9 sind die entsprechenden Reihen für ungerades $k \geq 3$ gleich Null. Man setzt schließlich

$$\gamma := \gamma(\Omega) := \min\{|\omega| \,;\, 0 \neq \omega \in \Omega\}$$

und erhält den

Satz. *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $0 < |z| < \gamma(\Omega)$ *gilt*

$$(2) \qquad \wp(z) = z^{-2} + \sum_{n=2}^{\infty} (2n-1) G_{2n} \cdot z^{2n-2} = z^{-2} + 3G_4 \cdot z^2 + 5G_6 \cdot z^4 + \ldots \,.$$

Beweis. Aufgrund von

$$\frac{1}{(1-t)^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-t}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} m t^{m-1} \,, \quad |t| < 1,$$

hat man für $\omega \neq 0$

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{(1 - z/\omega)^2} - 1\right) = \sum_{m=2}^{\infty} m \cdot \frac{z^{m-1}}{\omega^{m+1}} \,, \quad |z| < \gamma,$$

und daher

$$(*) \qquad \wp(z) = z^{-2} + \sum_{0 \neq \omega \in \Omega} \left(\sum_{m=2}^{\infty} m \cdot \frac{z^{m-1}}{\omega^{m+1}} \right) \,, \quad 0 < |z| < \gamma.$$

Wegen

$$\left| m \cdot \frac{z^{m-1}}{\omega^{m+1}} \right| \leq \gamma m \left(\frac{|z|}{\gamma}\right)^{m-1} \cdot |\omega|^{-3}$$

und aufgrund des Konvergenz-Lemma 1.9 ist die Reihe $(*)$ in m und ω absolut konvergent. Nach Satz 1.8 darf man also umordnen und erhält

$$\wp(z) = z^{-2} + \sum_{m \geq 2} m G_{m+1} \cdot z^{m-1} \,, \quad 0 < |z| < \gamma.$$

Wegen Proposition 1.9 ist das aber (2). □

3. Die zweite Differentialgleichung. *Die* WEIERSTRASS*sche* $\wp$*-Funktion genügt der Differentialgleichung*

$$(1) \qquad \wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3.$$