man allein aus der Annahme der Existenz *einer geeigneten* elliptischen Funktion eine Beschreibung aller elliptischen Funktionen folgern kann. Es sind dabei keine weiteren analytischen Schlüsse erforderlich. Dazu werden lediglich die LIOUVILLEschen Sätze angewendet!

Existenz-Satz. *Es gibt eine elliptische Funktion $\wp = \wp_\Omega$, die genau in jedem Gitterpunkt von Ω einen Pol 2. Ordnung hat und sonst holomorph ist. Ihre* LAURENT*-Reihe bei 0 hat die Form*

$$\wp(z) = z^{-2} + a_1 z + \ldots . \tag{1}$$

Der *Beweis* wird bis zum nächsten Paragrafen zurückgestellt (vgl. **3.1**). Nach 1(3) ist klar, dass $\wp$ an allen Polen das Residuum Null hat. Wegen Satz 2A ist $\wp$ als elliptische Funktion durch (1) eindeutig bestimmt. Man nennt $\wp$ die WEIERSTRASSsche $\wp$*–Funktion* (zum Gitter Ω).

Proposition. a) *$\wp$ ist eine gerade Funktion, d. h. $\wp(-z) = \wp(z)$. Es gilt $a_1 = 0$ in* (1).
b) *$\wp'$ ist eine ungerade Funktion, die genau an allen Gitterpunkten von Ω Pole 3. Ordnung hat und sonst holomorph ist.*

Beweis. a) Die elliptische Funktion $f(z) := \wp(-z) - \wp(z)$ ist nach (1) in 0 und daher überall holomorph. Nach Satz 2A ist f konstant und somit 0 nach (1).
b) Die Behauptung folgt aus a) und dem Existenz-Satz. □

Damit können wir schon alle Nullstellen von $\wp'$ angeben.

Lemma A. *Ist $\omega \in \Omega$, aber $\omega/2 \notin \Omega$, dann ist $\omega/2$ eine einfache Nullstelle von $\wp'$. Jede Nullstelle von $\wp'$ hat umgekehrt diese Form.*

Beweis. Da $\wp'$ eine ungerade elliptische Funktion ist, hat man

$$\wp'(z + \omega) = \wp'(z) = -\wp'(-z).$$

Ist $\omega/2$ kein Pol von $\wp$ und $\wp'$, d. h. $\omega/2 \notin \Omega$, dann darf man $z = -\omega/2$ setzen und erhält

$$\wp'(\omega/2) = -\wp'(\omega/2), \quad \text{also} \quad \wp'(\omega/2) = 0.$$

Sei ω_1, ω_2 eine Basis von Ω. Im Periodenparallelogramm $P = \Diamond(\omega_1, \omega_2)$ hat $\wp'$ dann die Nullstellen

$$\omega_1/2\ ,\ \omega_2/2\ ,\ (\omega_1 + \omega_2)/2\ . \tag{$*$}$$

Nach (1) hat $\wp'$ in P nur einen Pol 3. Ordnung bei 0. Gemäß Satz 2C ist die Anzahl aller Nullstellen von $\wp'$ in P (gezählt mit ihren Vielfachheiten) gleich 3. Die Nullstellen $(*)$ sind daher einfach und es sind alle Nullstellen von $\wp'$ in P. Ist nun z eine beliebige Nullstelle von $\wp'$, so existiert ein $\omega' \in \Omega$ mit $z - \omega' \in P$. Dann ist aber $z - \omega'$ einer der Punkte $(*)$ und somit z von der Form $\omega/2$ mit $\omega \in \Omega$, aber $\omega/2 \notin \Omega$. □

Als gerade Funktion hat $\wp$ mit u auch $-u$ als Nullstelle. Allgemein gilt das

Lemma B. *Es sei P ein Periodenparallelogramm. Zu $w \in \mathbb{C}$,*

$$w \neq \wp(\omega/2)\ ,\ \omega \in \Omega\ ,\ \omega/2 \notin \Omega, \tag{2}$$

gibt es genau zwei verschiedene Punkte $u, v \in P$ mit $\wp(u) = \wp(v) = w$. In diesem Fall gilt $u + v \in \Omega$. Gibt es umgekehrt zwei verschiedene $u, v \in P$ mit $\wp(u) = \wp(v) = w$, so gilt (2).

Beweis. Man wendet Satz 2C auf $\wp$ an. Nach (1) ist die Anzahl der w-Stellen von $\wp$ in P (gezählt mit ihren Vielfachheiten) gleich 2. Man unterscheidet die beiden Fälle:
a) Es gibt nur ein $u \in P$ mit $\wp(u) = w$. Dann ist u eine doppelte w-Stelle von $\wp$ und es folgt $\wp'(u) = 0$. Wegen (2) ist dieser Fall nach Lemma A ausgeschlossen.
b) Es gibt zwei verschiedene $u, v \in P$ mit $\wp(u) = \wp(v) = w$. Aus Satz 2D folgt dann sogleich $u + v \in \Omega$. □

Man wählt jetzt eine Basis ω_1, ω_2 von Ω, setzt $P := \diamond(\omega_1, \omega_2)$ und benutzt die Standard-Bezeichnung

$$e_k := \wp(\omega_k/2)\ ,\ k = 1, 2, 3 \quad \text{mit} \ \ \omega_3 := \omega_1 + \omega_2. \tag{3}$$

Nach Lemma A und B hat dann

$$\wp(z) - e_k \ \ \text{genau eine doppelte Nullstelle in } P, \text{ nämlich in } z = \omega_k/2 \tag{4}$$

für $k = 1, 2, 3$ und

$$\wp(z) - w \quad \text{zwei einfache Nullstellen in } P \text{ für } w \neq e_1, e_2, e_3. \tag{5}$$

Weil $\omega_1/2, \omega_2/2, \omega_3/2$ paarweise verschieden sind, sind nach (4) auch

$$e_1, e_2, e_3 \quad \text{paarweise verschieden.} \tag{6}$$

Diese Ergebnisse führen bereits zur ersten Differentialgleichung für $\wp$:

Satz. *Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ gilt*

$$\wp'^2(z) = 4 \cdot (\wp(z) - e_1) \cdot (\wp(z) - e_2) \cdot (\wp(z) - e_3).$$

Beweis. Man betrachtet neben $\wp'^2$ die elliptische Funktion

$$f(z) := 4 \cdot (\wp(z) - e_1) \cdot (\wp(z) - e_2) \cdot (\wp(z) - e_3).$$

Nach (4) hat f in P Nullstellen (und zwar doppelte) genau an den Stellen

$$\omega_1/2\ ,\ \omega_2/2\ ,\ \omega_3/2 = (\omega_1 + \omega_2)/2.$$

Nach Lemma A gilt die gleiche Aussage für $\wp'^2$. Da sich die Pole in f nicht wegheben können, hat f in P nur einen Pol in 0 und zwar der Ordnung 6. Wegen (1) gilt aber

$$(*) \qquad \wp(z) = z^{-2} + \dots\,, \quad \wp'(z) = -2z^{-3} + \dots\,, \quad \wp'^2(z) = 4z^{-6} + \dots$$

und daher hat auch $\wp'^2$ in P nur einen Pol bei $z = 0$ und zwar von der Ordnung 6. Damit ist $\wp'^2/f$ eine elliptische Funktion ohne Pole, also nach Satz 2A konstant. Vergleicht man mit $(*)$ den Koeffizienten von z^{-6} in den LAURENT-Entwicklungen um 0, so sieht man, dass diese Konstante gleich 1 ist. □

Bemerkungen. a) Die Definition (3) hängt natürlich von der Wahl der Basis von Ω ab. Bei einem Wechsel der Basis werden die Werte e_1, e_2, e_3 aber lediglich permutiert.
b) Wenn man bereit ist, die zunächst unbekannten Koeffizienten von z^2 und z^4 in der LAURENT-Entwicklung von $\wp$ einzubeziehen, kann man auch eine zweite Form der Differentialgleichung für $\wp$ so herleiten, wie es in **3.3** geschehen wird.
c) Eine einfache Funktion $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ mit zwei Polen erster Ordnung ist z. B.

$$f(z) := \frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)}\,, \quad w \in \mathbb{C} \setminus \tfrac{1}{2}\Omega$$

(vgl. Proposition 5.1). Man sieht unschwer, dass f nur Pole 1. Ordnung an den Stellen Ω und $-w + \Omega$ besitzt.

4. Der Körper $\mathcal{K}(\Omega)$. Wegen 3(1) ist klar, dass sich bei einem Polynom in $\wp$ die Pole nicht wegheben können. Damit ist $\wp$ nicht algebraisch, also transzendent über dem Körper $\mathbb{C}$. Der Körper $\mathbb{C}(\wp)$ ist somit isomorph zum Körper aller rationalen Funktionen über $\mathbb{C}$.

Satz. a) *Die geraden elliptischen Funktionen bezüglich Ω sind genau die rationalen Funktionen in $\wp$.*
b) $\mathcal{K}(\Omega) = \mathbb{C}(\wp)[\wp']$.
c) *Der Grad der Körpererweiterung von $\mathcal{K}(\Omega)$ über $\mathbb{C}(\wp)$ ist* 2.

Wegen Satz 3 lässt sich dann jedes $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ eindeutig schreiben als

$$(1) \qquad f = R(\wp) + Q(\wp) \cdot \wp',$$

wobei R und Q rationale Funktionen über $\mathbb{C}$ sind. Man kennt also die elliptischen Funktionen „so gut, wie man die Funktion $\wp$ kennt".

Beweis. a) Es sei $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ gerade und nicht konstant. Die Ordnung von f, also die Anzahl der Pole von f im Periodenparallelogramm (gezählt mit ihren Vielfachheiten), sei m. Weiter sei $P := \diamond(\omega_1, \omega_2)$ die zugehörige Grundmasche und $N := \{c \in P\,;\ f'(c) = 0\}$. Dann ist N endlich.

(i) *Die Zahl m ist gerade, $m = 2k$. Zu jeder komplexen Zahl $u \notin f(N)$ gibt es paarweise verschiedene Punkte*

$$(*) \qquad c_1, \dots, c_k\,,\ c'_1, \dots, c'_k \in P\,,\ c_j + c'_j \in \Omega \quad \text{für } j = 1, \dots, k,$$

so dass u von f in P genau an den Stellen $(*)$ angenommen wird, und zwar mit der Vielfachheit 1.

Nach Satz 2C ist die Anzahl der u-Stellen von f ebenfalls gleich m. Sei $c \in P$ mit $f(c) = u$ gegeben. Da f gerade ist, gilt auch $f(-c) = u$ und es gibt ein $\omega \in \Omega$ mit $c' = \omega - c \in P$ sowie $f(c') = u$. Im Falle $c' = c$ würde $f(c+z) = f(\omega - c + z) = f(-c+z) = f(c-z)$, also $f'(c+z) = -f'(c-z)$ und damit $f'(c) = 0$, also $u \in f(N)$ folgen. Daher sind c und $c' = \omega - c$ verschieden und die u-Stellen von f treten in Paaren auf. Wegen $u \notin f(N)$ hat jede u-Stelle die Vielfachheit 1.

(ii) f *ist eine rationale Funktion in* $\wp$.
Man wählt nun $v \neq u$ nicht aus $f(N)$ und erhält nach (i) Punkte

$$(**) \qquad d_1, \ldots, d_k\ ,\ d'_1, \ldots, d'_k\ ,\ d_j + d'_j \in \Omega \qquad \text{für } j = 1, \ldots, k,$$

so dass v von f in P genau an den Stellen $(**)$ angenommen wird, und zwar mit der Vielfachheit 1. Die elliptische Funktion

$$g(z) := \frac{f(z) - u}{f(z) - v}$$

hat dann

$(***)$ Nullstellen in P genau an den Stellen $(*)$, und zwar mit der Ordnung 1, und Pole in P genau an den Stellen $(**)$, und zwar mit der Ordnung 1,

denn die Pole von f heben sich heraus.

Weil die Punkte in $(*)$ und $(**)$ paarweise verschieden sind, gilt

$$c_j, c'_j, d_j, d'_j \notin \frac{1}{2}\Omega.$$

Demnach hat

$$h(z) := \frac{(\wp(z) - \wp(c_1)) \cdot \ldots \cdot (\wp(z) - \wp(c_k))}{(\wp(z) - \wp(d_1)) \cdot \ldots \cdot (\wp(z) - \wp(d_k))}$$

ebenfalls die Eigenschaft $(***)$. Der Quotient g/h ist daher holomorph, also nach Satz 2A konstant. Aus $g \in \mathbb{C}(\wp)$ folgt wegen

$$f = \frac{vg - u}{g - 1}$$

die Behauptung.
b) Ist $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ nicht-konstant, dann schreibt man

$$f = g + h\wp' \ \text{ mit } \ g(z) := \frac{1}{2}(f(z) + f(-z)) \ \text{ und } \ h(z) = \frac{1}{2\wp'(z)}(f(z) - f(-z)).$$

Offenbar gehören g und h zu $\mathcal{K}(\Omega)$ und sind gerade. Nach a) sind dann g und h rationale Funktionen von $\wp$.
c) Wegen $\wp' \notin \mathbb{C}(\wp)$ folgt die Behauptung aus Satz 3. □

In algebraischer Formulierung erhält man das

Korollar A. *Für über $\mathbb{C}$ unabhängige Unbestimmte X, Y gilt*

$$\mathcal{K}(\Omega) \cong \mathbb{C}(X)[Y]/I(X,Y),$$

wenn $I(X,Y)$ das von $Y^2 - 4(X-e_1)(X-e_2)(X-e_3)$ erzeugte Hauptideal in $\mathbb{C}(X)[Y]$ bezeichnet.

Beweis. Man definiert einen Ring-Homomorphismus

$$\Phi : \mathbb{C}(X)[Y] \to \mathcal{K}(\Omega) \quad \text{durch} \quad X \mapsto \wp\,,\ Y \mapsto \wp'.$$

Nach dem Satz ist Φ surjektiv. Man schreibt nun $\varphi \in \mathbb{C}(X)[Y]$ nach Division mit Rest über dem Körper $\mathbb{C}(X)$ in der Form

$$\varphi(X,Y) = \big(Y^2 - 4(X-e_1)(X-e_2)(X-e_3)\big) \cdot q(X,Y) + r(X,Y)$$

mit $q, r \in \mathbb{C}(X)[Y]$ und $r(X,Y) = r_1(X) + r_2(X) \cdot Y$ mit $r_1(X), r_2(X) \in \mathbb{C}(X)$. Aufgrund der Differentialgleichung in Satz 3 liegt φ genau dann im Kern von Φ, wenn $r(\wp, \wp') = 0$ gilt. Wegen (1) bedeutet das $r(X,Y) = 0$. Damit erhält man Kern $\Phi = I(X,Y)$ und die Behauptung folgt aus dem Homomorphie-Satz für Ringe. □

Nach dem Satz hat $\mathcal{K}(\Omega)$ im Sinne der Algebra den Transzendenzgrad 1 über $\mathbb{C}$ (vgl. K. Meyberg [1976], Abschnitt 6.10B). Damit sind je zwei Elemente von $\mathcal{K}(\Omega)$ algebraisch abhängig und man erhält das

Korollar B. *Zu f, g aus $\mathcal{K}(\Omega)$ gibt es ein nicht-triviales Polynom $P(X,Y)$ in $\mathbb{C}[X,Y]$ mit*

$$P(f,g) = 0.$$

Bemerkung. Weil $\mathcal{K}(\Omega)$ ein Körper ist, ist $I(X,Y)$ ein maximales Ideal in $\mathbb{C}(X)[Y]$ und somit $Y^2 - 4(X-e_1)(X-e_2)(X-e_3)$ ein irreduzibles Polynom in Y über $\mathbb{C}(X)$.

5*. Divisoren. Für jede Abbildung $\varphi : \mathbb{C}/\Omega \to \mathbb{Z}$ mit endlichem Träger ist der *Grad* von φ definiert durch

$$\text{Grad } \varphi := \sum_{c \in \mathbb{C}/\Omega} \varphi(c) \in \mathbb{Z}.$$

Unter einem *Divisor* von $\mathbb{C}/\Omega$ versteht man nun eine Abbildung $\varphi : \mathbb{C}/\Omega \to \mathbb{Z}$ mit endlichem Träger und Grad $\varphi = 0$. Bei punktweiser Addition bildet die Menge Div $(\mathbb{C}/\Omega)$ aller Divisoren von $\mathbb{C}/\Omega$ eine abelsche Gruppe.

Jedem $0 \neq f \in \mathcal{K}(\Omega)$ kann nun eine Abbildung

$$\varphi_f : \mathbb{C}/\Omega \longrightarrow \mathbb{Z}\,,\ \varphi_f(c+\Omega) := \text{ord}_c f,$$