2. Die LAURENT-Entwicklung. Wie in 1.9(2) betrachtet man die EISENSTEIN-Reihe

$$(1) \qquad G_k := G_k(\Omega) := \sum_{0 \neq \omega \in \Omega} \omega^{-k} \quad \text{für gerades } k \geq 4.$$

Nach Proposition 1.9 sind die entsprechenden Reihen für ungerades $k \geq 3$ gleich Null. Man setzt schließlich

$$\gamma := \gamma(\Omega) := \min\{|\omega| \, ; \, 0 \neq \omega \in \Omega\}$$

und erhält den

Satz. *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $0 < |z| < \gamma(\Omega)$ *gilt*

$$(2) \qquad \wp(z) = z^{-2} + \sum_{n=2}^{\infty} (2n-1) G_{2n} \cdot z^{2n-2} = z^{-2} + 3G_4 \cdot z^2 + 5G_6 \cdot z^4 + \dots \,.$$

Beweis. Aufgrund von

$$\frac{1}{(1-t)^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-t}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} m t^{m-1} \,, \quad |t| < 1,$$

hat man für $\omega \neq 0$

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{(1-z/\omega)^2} - 1\right) = \sum_{m=2}^{\infty} m \cdot \frac{z^{m-1}}{\omega^{m+1}} \,, \quad |z| < \gamma,$$

und daher

$$(*) \qquad \wp(z) = z^{-2} + \sum_{0 \neq \omega \in \Omega} \left(\sum_{m=2}^{\infty} m \cdot \frac{z^{m-1}}{\omega^{m+1}} \right) \,, \quad 0 < |z| < \gamma.$$

Wegen

$$\left| m \cdot \frac{z^{m-1}}{\omega^{m+1}} \right| \leq \gamma m \left(\frac{|z|}{\gamma} \right)^{m-1} \cdot |\omega|^{-3}$$

und aufgrund des Konvergenz-Lemma 1.9 ist die Reihe $(*)$ in m und ω absolut konvergent. Nach Satz 1.8 darf man also umordnen und erhält

$$\wp(z) = z^{-2} + \sum_{m \geq 2} m G_{m+1} \cdot z^{m-1} \,, \quad 0 < |z| < \gamma.$$

Wegen Proposition 1.9 ist das aber (2). □

3. Die zweite Differentialgleichung. *Die* WEIERSTRASS*sche* $\wp$*-Funktion genügt der Differentialgleichung*

$$(1) \qquad \wp'^2 = 4\wp^3 - g_2 \wp - g_3.$$

Dabei sind g_2 und g_3 definiert durch

(2) $$g_2 := g_2(\Omega) := 60\ G_4(\Omega) \quad \text{und} \quad g_3 := g_3(\Omega) := 140\, G_6(\Omega)\,.$$

Man nennt g_2 und g_3 die WEIERSTRASS–*Invarianten* des Gitters Ω. Wir verwenden das LANDAU-*Symbol* und schreiben $\mathcal{O}(z^k)$ für eine Funktion $f(z)$, die $|f(z)| \leq C \cdot |z|^k$ mit einem geeigneten C für z aus einer Umgebung von 0 erfüllt.

Beweis. Ausgehend von

$$\wp(z) = z^{-2} + 3G_4 \cdot z^2 + 5G_6 \cdot z^4 + \mathcal{O}(z^6)$$

(vgl. 2(2)) berechnet man

$$\begin{array}{rcl} \wp^2(z) & = & z^{-4} + 6G_4 + 10G_6 \cdot z^2 + \mathcal{O}(z^3)\ , \\ \wp^3(z) & = & z^{-6} + 9G_4 \cdot z^{-2} + 15G_6 + \mathcal{O}(z)\ , \\ \wp'(z) & = & -2 \cdot z^{-3} + 6G_4 \cdot z + 20G_6 \cdot z^3 + \mathcal{O}(z^4)\ , \\ \wp'^2(z) & = & 4 \cdot z^{-6} - 24G_4 \cdot z^{-2} - 80G_6 + \mathcal{O}(z)\ . \end{array}$$

Daraus erhält man mit (2)

(∗) $$\wp'^2(z) - 4\wp^3(z) + g_2\wp(z) + g_3 = \mathcal{O}(z).$$

Hier gehört die linke Seite zu $\mathcal{K}(\Omega)$ und hat Pole höchstens dort, wo $\wp$ oder $\wp'$ Pole hat. Nach (∗) ist die linke Seite aber bei 0 und daher überall holomorph. Satz 2.2A zeigt, dass diese Funktion konstant ist. Nach (∗) wiederum ist diese Konstante gleich Null. □

Differenziert man (1), so folgt das

Korollar A. *Es gilt*

$$2\wp'' = 12\wp^2 - g_2.$$

Korollar B. *Für $k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\wp^{(k)} \in \mathbb{Z}[G_4, G_6, \wp] + \mathbb{Z}[G_4, G_6, \wp]\wp'.$$

Beweis. Dies ist für $k = 0$ und 1 richtig. Wegen (2) folgt die Aussage für $k = 2$ aus Korollar A. Nun ergibt eine Induktion die Behauptung. □

Korollar C. *Für $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ sind quivalent:*
(i) *f ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \Omega$.*
(ii) *$f \in \mathbb{C}[\wp] + \mathbb{C}[\wp] \cdot \wp'$.*

Beweis. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Subtrahiert man $\alpha\wp^n$ bzw. $\alpha\wp^n \cdot \wp'$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, geeignet, von f, so kann man nun die Ordnung der Pole in den Gitterpunkten sukzessiv erniedrigen. Schließich beachte man noch $\mathrm{res}_0 f = 0$ nach Satz 2.2B.
(ii) $\Longrightarrow$ (i): Klar. □

Korollar D. *Für $n \geq 4$ gilt die Rekursionsformel*

$$(3) \qquad (n-3)(2n+1)(2n-1)G_{2n} = 3 \cdot \sum_{\substack{p\geq 2, q\geq 2\\ p+q=n}} (2p-1)(2q-1)G_{2p}G_{2q}.$$

Beweis. Man trägt die LAURENT-Reihe 2(2) in $\wp'' + 30\,G_4 = 6\wp^2$ nach Korollar A ein:

$$\sum_{n\geq 2}(2n-1)(2n-2)(2n-3)G_{2n}z^{2n-4} + 30G_4$$

$$= 12\sum_{n\geq 2}(2n-1)G_{2n}z^{2n-4} + 6\sum_{p\geq 2}\sum_{q\geq 2}(2p-1)(2q-1)G_{2p}G_{2q}z^{2p+2q-4}\ .$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt bereits die Behauptung. □

Speziell erhält man

$$(4) \quad 7G_8 = 3G_4^2\ ,\ 11G_{10} = 5G_4G_6\ , 143G_{12} = 42G_4G_8 + 25G_6^2 = 18G_4^3 + 25G_6^2$$

und das

Korollar E. *Für $k \geq 8$ gilt*

$$G_k \in \mathbb{Q}[G_4, G_6].$$

Korollar F. *Sei Ω ein Gitter in $\mathbb{C}$ mit zugehörigen* WEIERSTRASS*–Invarianten g_2 und g_3. Jede in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ meromorphe, nicht-konstante Lösung f der Differentialgleichung*

$$f'^2 = 4f^3 - g_2 f - g_3$$

wird durch $f(z) = \wp(z+w)\ ,\ z \in G$, mit geeignetem $w \in \mathbb{C}$ gegeben. Ist $f \in \mathcal{M}$ eine solche Lösung, dann ist Ω das Periodengitter von f. Das Gitter Ω ist durch $g_2(\Omega)$ und $g_3(\Omega)$, also auch durch $G_4(\Omega)$ und $G_6(\Omega)$ eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei f eine in G meromorphe, nicht-konstante Lösung der angegebenen Differentialgleichung. Ist f in einer Kreisscheibe $U \subset G$ um u holomorph und f' ungleich Null in U, dann gilt bei geeigneter Wahl einer Wurzel $f' = \sqrt{4f^3 - g_2 f - g_3}$. Nach Lemma 2.3B wählt man nun ein $w \in \mathbb{C}$ mit $\wp(w+u) = f(u)$ und darf darüber hinaus noch $\wp'(w+u) = f'(u)$ annehmen, indem man ggf. w durch $-w-2u$ ersetzt. Die Funktionen $f(z)$ und $g(z) := \wp(z+w)$ genügen der gleichen Differentialgleichung 1. Ordnung und stimmen im Punkt u überein. Dann folgt $f(z) = g(z)$ für alle $z \in U$ aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz (vgl. W. WALTER [2000], 66). Der Identitätssatz impliziert $f(z) = g(z)$ für alle $z \in G$. Die fehlende Behauptung folgt nun aus der Tatsache, dass für die $\wp$-Funktion nach dem Konstruktions-Satz 1 das Periodengitter gleich der Polstellenmenge ist. □

Bemerkung. An Stelle der Differentialgleichung (1) kann man bei gegebener rationaler Funktion R allgemeiner nach Lösungen $w = f(z)$ der so genannten *binomischen Differentialgleichung*

$$w'^n = R(z, w) \tag{5}$$

für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ fragen. Es gilt hier der

Satz von Malmquist und Yosida. *Besitzt* (5) *eine auf* $\mathbb{C}$ *meromorphe und transzendente Lösung, dann ist* $R(z, w)$ *ein Polynom in* w *von einem Grad* $\leq 2n$.

Einen *Beweis* findet man in E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain*, J. Wiley, New York 1976, Theorem 4.6.4. Eine Klassifikation der binomischen Differentialgleichungen beschreibt N. Steinmetz, Math. Ann. **244**, 263–274 (1979).

4. Ein Vergleich der Differentialgleichungen. Neben

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 \tag{1}$$

war in Satz 2.3 die Differentialgleichung

$$\wp'^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3) \tag{2}$$

hergeleitet worden. Dabei waren e_1, e_2, e_3 wie in 2.3(3) durch

$$e_k = \wp(\omega_k/2)\ ,\ k = 1, 2, 3\ ,\ \omega_3 := \omega_1 + \omega_2, \tag{3}$$

definiert, wenn ω_1, ω_2 eine Basis von Ω ist. Da $\wp$ mehr als drei verschiedene Werte annimmt, ergibt ein Vergleich für eine Unbestimmte X über $\mathbb{C}$ den

Satz. *Es gilt*

$$4X^3 - g_2X - g_3 = 4(X - e_1)(X - e_2)(X - e_3).$$

Aus Korollar 2.4A folgt dann

Korollar A. *Für über* $\mathbb{C}$ *unabhängige Unbestimmte* X, Y *gilt*

$$\mathcal{K}(\Omega) \cong \mathbb{C}(X)[Y]/I(X, Y),$$

wenn $I(X, Y)$ *das von* $Y^2 - 4X^3 + g_2X + g_3$ *in* $\mathbb{C}(X)[Y]$ *erzeugte Hauptideal ist.*

Ein Koeffizientenvergleich im Satz ergibt das

Korollar B. *Es gilt*

$$0 = e_1 + e_2 + e_3, \tag{4}$$

$$g_2 = -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1), \tag{5}$$

$$g_3 = 4e_1e_2e_3. \tag{6}$$

Korollar C. *Es gilt*

$$g_2^3 - 27g_3^2 = 16(e_1-e_2)^2(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2 \neq 0.$$

Beweis. Mit (4) und (5) erhält man zunächst

$$(*) \qquad g_2 = 2(e_1^2+e_2^2+e_3^2) \quad \text{bzw.} \quad g_2^2 = 16(e_1^2e_2^2+e_2^2e_3^2+e_3^2e_1^2).$$

Weiter ergeben (4) und (5) dann auch noch

$$2(e_1-e_2)^2 = 2(e_1^2+e_2^2) - 4e_1e_2 = 2g_2 - 2e_3^2 + 4e_3(e_1+e_2) = 2g_2 - 6e_3^2,$$

also

$$(e_1-e_2)^2 = g_2 - 3e_3^2.$$

Da die durch zyklische Vertauschung der e_1, e_2, e_3 entstehenden Beziehungen ebenfalls gültig sind, hat man

$$\begin{aligned}
&16(e_1-e_2)^2(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2 = 16(g_2-3e_1^2)(g_2-3e_2^2)(g_2-3e_3^2)\\
&= 16g_2^3 - 3\cdot 16g_2^2(e_1^2+e_2^2+e_3^2) + 9\cdot 16g_2(e_1^2e_2^2+e_2^2e_3^2+e_3^2e_1^2) - 27\cdot 16e_1^2e_2^2e_3^2\ .
\end{aligned}$$

Wegen $(*)$ und (6) ist die rechte Seite aber gleich $g_2^3 - 27g_3^2$. Nach 2.3(6) sind e_1, e_2, e_3 paarweise verschieden. □

$$(7) \qquad \Delta := \Delta(\Omega) := g_2^3 - 27g_3^2$$

nennt man die *Diskriminante* und

$$(8) \qquad j := j(\Omega) := (12g_2)^3/\Delta$$

die *absolute Invariante* des Gitters Ω. Mit Korollar B und C folgt das

Korollar D. *Es gilt*

$$j = -4\cdot 12^3 \cdot \frac{(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1)^3}{(e_1-e_2)^2(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2}.$$

Korollar E. *Für* $\lambda := \dfrac{e_2-e_3}{e_1-e_3}$ *gilt*

$$j = 256\cdot\frac{(1-\lambda+\lambda^2)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}.$$

Bemerkungen. a) Die Diskriminante Δ ist (bis auf einen Faktor) zugleich auch die Diskriminante des Polynoms $f(X) := 4X^3 - g_2X - g_3$ im Sinne der Algebra (vgl. S. LANG [1993], V, § 10): Dort wird die Diskriminante des Polynoms f (bis auf einen Faktor) als die *Resultante* von f und f' erklärt, also durch

$$\det\begin{pmatrix} 4 & 0 & -g_2 & -g_3 & 0\\ 0 & 4 & 0 & -g_2 & -g_3\\ 12 & 0 & -g_2 & 0 & 0\\ 0 & 12 & 0 & -g_2 & 0\\ 0 & 0 & 12 & 0 & -g_2 \end{pmatrix} = -64\Delta.$$