

- b) Die Bezeichnung „absolute Invariante“ rechtfertigt sich in 4.4.
 c) λ aus Korollar E tritt bereits in E.2 beim Übergang von der WEIERSTRASSschen zur LEGENDRESchen Normalform elliptischer Integrale auf.

5. Konjugationsstabile Gitter. Ein Gitter Ω heißt *konjugationsstabil*, wenn mit ω auch die konjugiert komplexe Zahl $\bar{\omega}$ zu Ω gehört, d. h. $\Omega = \bar{\Omega}$. Die wichtigsten Beispiele für konjugationsstabile Gitter sind

- a) die *Rechteck-Gitter*: $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ mit $\frac{1}{i}\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}^+$,
 b) das *Sechseck-Gitter*: $\Omega = \mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}$ mit $\rho = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$.

Man erhält direkt die

Proposition. *Ist Ω ein konjugationsstabiles Gitter, dann gilt für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$*

$$\overline{\wp_{\Omega}(z)} = \wp_{\Omega}(\bar{z}) \quad \text{und} \quad \overline{\wp'_{\Omega}(z)} = \wp'_{\Omega}(\bar{z}).$$

Speziell hat man für $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$:

- a) $\wp_{\Omega}(z)$ ist reell für $z \in \mathbb{R}$ und $z \in i\mathbb{R}$,
 b) $\wp'_{\Omega}(z)$ ist reell für $z \in \mathbb{R}$ und rein imaginär für $z \in i\mathbb{R}$.

Eine Charakterisierung enthält der folgende

Satz. *Für ein Gitter $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ sind äquivalent:*

- (i) $g_2(\Omega)$ und $g_3(\Omega)$ sind beide reell.
 (ii) Alle $G_k(\Omega)$, $k \geq 4$ gerade, sind reell.
 (iii) Von den Größen e_1, e_2, e_3 sind zwei konjugiert komplex und die dritte reell oder alle drei reell.
 (iv) Ω ist konjugationsstabil.

Beweis. (i) \iff (ii): Man verwende 3(2) und Korollar 3D.

(i) \iff (iv): Die Behauptung folgt aus $g_2(\Omega) = g_2(\bar{\Omega})$, $g_3(\Omega) = g_3(\bar{\Omega})$ und der Tatsache, dass Ω nach Korollar 3F durch g_2 und g_3 eindeutig bestimmt ist.

(i) \implies (iii): Die Werte e_1, e_2, e_3 sind nach Satz 4 genau die Nullstellen des reellen Polynoms $4X^3 - g_2X - g_3$. Daher ist mindestens eine Nullstelle reell.

(iii) \implies (i): Man verwende 4(5) und 4(6). \square

Bemerkung. Mit konjugationsstabilen Gittern kann man die elliptischen Integrale in WEIERSTRASSscher Normalform

$$\int \frac{dt}{\sqrt{q(t)}}, \quad q(t) = 4t^3 - c_2t - c_3,$$

mit reellen c_2, c_3 berechnen (vgl. 4.5).

6. Die durch \wp definierte Abbildung für ein Rechteck-Gitter. In diesem Abschnitt sei Ω stets ein Rechteck-Gitter und

- (1) (ω_1, ω_2) eine Basis von Ω mit $\frac{1}{i}\omega_1 > 0$ und $\omega_2 > 0$.

Man überlegt sich leicht, dass ω_1 und ω_2 hierdurch eindeutig bestimmt sind.

Proposition. Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

a) $\wp(z)$ ist genau dann reell, wenn es ein $\omega \in \Omega$ gibt mit

$$(2) \quad z \in \frac{\omega}{2} + \mathbb{R} \quad \text{oder} \quad z \in \frac{\omega}{2} + i\mathbb{R}.$$

b) Für $z \in \frac{\omega}{2} + \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$, ist $\wp'(z)$ reell. Für $z \in \frac{\omega}{2} + i\mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$, ist $\wp'(z)$ rein imaginär.

Beweis. Wegen (1) gilt $\frac{1}{2}(\omega - \bar{\omega}) \in \Omega$. Dann folgt

$$(3) \quad \overline{\wp\left(\frac{\omega}{2} + z\right)} = \wp\left(\frac{\omega}{2} + \bar{z}\right), \quad \overline{\wp'\left(\frac{\omega}{2} + z\right)} = \wp'\left(\frac{\omega}{2} + \bar{z}\right)$$

aus Proposition 5. Weil \wp gerade und \wp' ungerade ist, nehmen \wp und \wp' an

den angegebenen Stellen nur reelle bzw. rein imaginäre Werte an.

Sei nun $z \in \diamond(\omega_1, \omega_2)$, so dass z nicht von der Form (2) ist. Wäre $\wp(z)$ reell, so würde \wp wegen (3) an den vier paarweise verschiedenen Punkten

$$z, \omega_1 + \bar{z}, \omega_1 + \omega_2 - z, \omega_2 - \bar{z}$$

in $\diamond(\omega_1, \omega_2)$ den gleichen Wert annehmen. Das widerspricht Lemma 2.3B. \square

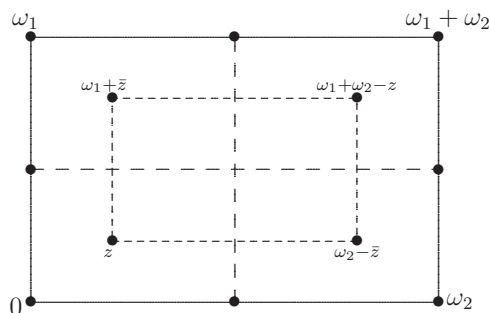


Abb. 8: Rechteckgitter

Satz. Das Innere des Viertelrechtecks $0, \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \frac{\omega_2}{2}$ der z -Ebene wird durch $z \mapsto w = \wp(z)$ auf die untere w -Halbebene konform so abgebildet, dass der Rand des Rechtecks auf die reelle Achse (von $-\infty$ nach $+\infty$) bijektiv abgebildet wird.

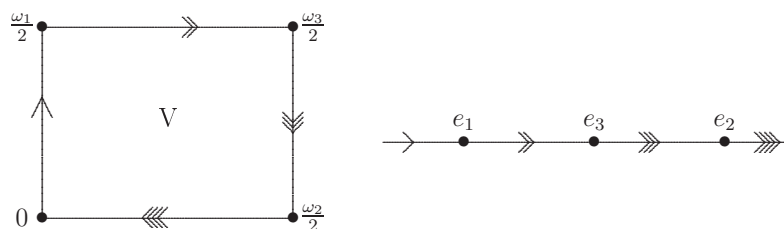


Abb. 9: Abbildungsverhalten auf dem Viertelrechteck

Beweis. Es sei V das Innere des obigen Viertelrechtecks. Für $z = x + iy$ mit $0 < x \leq \varepsilon$, $0 < y \leq \varepsilon$ mit hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$ gilt

$$(*) \quad \wp(z) = z^{-2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \frac{x^2 - y^2 - 2ixy}{(x^2 + y^2)^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Weil $\wp(V)$ zusammenhängend ist, impliziert die Proposition

$$(**) \quad \wp(V) \subset H \quad \text{mit} \quad H := \{w \in \mathbb{C} ; \operatorname{Im} w < 0\},$$

Wegen $\wp(z + \omega/2) = \wp(-z - \omega/2) = \wp(-z + \omega/2)$ folgt

$$\begin{aligned} \wp\left(\frac{\omega_3}{2} + V\right) &= \wp(V) \subset H, \\ \wp\left(\frac{\omega_1}{2} + V\right) &= \wp\left(\frac{\omega_2}{2} + V\right) \subset \overline{H} = \{w \in \mathbb{C} ; \operatorname{Im} w > 0\} = \mathbb{H}, \end{aligned}$$

so dass die Gleichheit in (**) aus der Proposition und Satz 2.2C folgt. Nach Lemma 2.3A hat man $\wp'(z) \neq 0$ für alle $z \in V$. Also ist $\wp : V \rightarrow H$ biholomorph.

Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ ist $f(y) := \wp(iy)$, $0 < y \leq \varepsilon$, wegen

$$f'(y) = i\wp'(iy) = 2y^{-3} + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \text{also} \quad f'(y) > 0,$$

sicher monoton wachsend. Aus der Differentialgleichung

$$\wp'^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3) \quad \text{und} \quad \wp'(iy) \neq 0$$

erhält man $f'(y) > 0$ für $0 < y < \omega_1/2i$. Also ist f auf dem gesamten Intervall $]0, \omega_1/2i]$ streng monoton wachsend und bildet es bijektiv auf $] -\infty, e_1]$ ab.

Auf den anderen Seiten von V schließt man ähnlich. \square

Die Bilder der anderen Viertelrechtecke von $\diamond(\omega_1, \omega_2)$ werden nach dem Schema

$$\begin{array}{|c|c|} \hline + & - \\ \hline - & + \\ \hline \end{array}$$

auf die untere bzw. obere w -Halbebene abgebildet. Dabei gilt insbesondere

$$e_1 < e_3 < e_2.$$

Mit dem Satz kann man jetzt auch gewisse Integrale der Form

$$\int \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - gt - h}} \quad \text{mit} \quad g, h \in \mathbb{R}$$

„berechnen“: Hat man zu g und h ein Rechteck-Gitter Ω mit $g = g_2(\Omega)$ und $h = g_3(\Omega)$ gefunden, dann gilt für $0 < r < s < \frac{\omega_2}{2}$

$$\int_{\wp(s)}^{\wp(r)} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - gt - h}} = s - r.$$

Zum *Beweis* substituiert man $t = \wp(z)$ und beachtet $\wp'(z) < 0$.

Das Problem liegt hier natürlich darin, ein Gitter Ω der angegebenen Art zu finden. Man vergleiche dazu Korollar 4.4.