Beweis. Man setzt $M := \max\{|\omega_1|, |\omega_2|, |\omega_3|\}$ und

$$\langle m, w\rangle := m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3 \quad \text{für} \quad m = (m_1, m_2, m_3)\,,\ w = (\omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

Schließlich wird das achsenparallele Quadrat in $\mathbb{C}$ mit Mittelpunkt 0 und Kantenlänge $2K$ mit $Q(K)$ bezeichnet, also

$$Q(K) := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |\mathrm{Re}\, z| \le K\ ,\ |\mathrm{Im}\, z| \le K\}.$$

Für alle $m = (m_1, m_2, m_3)^t \in \mathbb{Z}^3$ mit

$$(*) \qquad 0 \le m_1, m_2, m_3 \le N$$

gilt dann $\langle m, w\rangle \in Q(T)$ mit $T := 3MN$. Die Kanten von $Q(T)$ werden nun in t gleiche Teile geteilt. Damit erhält man eine Zerlegung von $Q(T)$ in t^2 Quadrate der Kantenlänge $2T/t$. Die Anzahl der $m \in \mathbb{Z}^3$ mit $(*)$ ist $(N+1)^3$. Nach dem DIRICHLETschen Schubfachschluss liegen im Fall $(N+1)^3 > t^2$ wenigstens zwei Punkte $\langle m', w\rangle$ und $\langle m'', w\rangle$ in einem Quadrat der Kantenlänge $2T/t$. Damit erhält man durch Differenzbildung ein $0 \ne m \in \mathbb{Z}^3$ mit (i) und

$$(**) \qquad \langle m, w\rangle \in Q\,(2T/t), \quad \text{also} \quad |\langle m, w\rangle\,| \le \sqrt{2}\cdot 2T/t.$$

Man wählt nun ein $t \in \mathbb{Z}$ mit $(N+1)^{3/2} > t \ge (N+1)^{3/2} - 1$. Dann gilt also $(N+1)^3 > t^2$ und $t \ge N^{3/2}$. Aus $(**)$ folgt somit (ii). □

Zum *Beweis* des Lemmas von JACOBI gibt es nach 1(1) ein $\rho > 0$ mit $|\omega| \ge \rho$ für alle $0 \ne \omega \in \Omega$. Für hinreichend großes N ist daher die linke Seite von (ii) gleich Null. □ □

Aus dem Lemma von JACOBI kann man nun einen neuen Beweis des Fundamental-Lemmas ableiten. Dieser Beweis ist methodisch nicht uninteressant:

Ist Ω eine diskrete Untergruppe von $\mathbb{C}$ und sind $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$, dann ergibt das Lemma von JACOBI sofort

$$(1) \qquad \Omega \subset \mathbb{Q}\omega_1 + \mathbb{Q}\omega_2.$$

Proposition. *Es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft*

$$\Omega \subset \frac{1}{N}(\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2).$$

Beweis. Andernfalls würde es $\omega \in \Omega$ nach (1) mit beliebig großen Nennern geben, d. h., man hätte

$$0 \ne \omega'_k = \frac{1}{N_k}(r_k\omega_1 + s_k\omega_2) \in \Omega\ ,\ k \in \mathbb{N},$$

mit ganzen Zahlen $r_k, s_k, N_k, \mathrm{ggT}(r_k, s_k, N_k) = 1$ und $N_k \to \infty$ für $k \to \infty$. Da man nach Addition geeigneter Punkte aus $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ohne Einschränkung $0 \le r_k\,,\ s_k \le N_k$, also auch $|\omega'_k| \le |\omega_1| + |\omega_2|$ für alle $k \in \mathbb{N}$ annehmen darf, würde es eine aus paarweise verschiedenen Gliedern bestehende konvergente Teilfolge von $(\omega'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ geben. Da Ω diskret ist, erhalten wir einen Widerspruch. □

Bekanntlich (vgl. K. Meyberg [1980], Satz 5.5.1) ist jede Untergruppe einer endlich erzeugten freien abelschen Gruppe selbst wieder frei. Nach der Proposition ist Ω eine Untergruppe einer *freien* Gruppe, also auch frei. Wegen $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \Omega$ ist Ω notwendig ein Gitter.

5. Die Gruppe $\mathrm{GL}\,(2;\mathbb{Z})$**.** Die Menge

$$\mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z}) := \left\{ U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \; ; \; a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$$

bildet bekanntlich bei Matrizen-Addition und -Multiplikation einen Ring mit Einselement $E := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Die Gruppe der Einheiten des Ringes $\mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z})$ heißt *allgemeine lineare Gruppe vom Grad 2 über* $\mathbb{Z}$ und wird mit $\mathrm{GL}\,(2;\mathbb{Z})$ bezeichnet:

(1) $\mathrm{GL}\,(2;\mathbb{Z}) := \{U \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z})\,;\ \text{es gibt } V \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z}) \text{ mit } UV = VU = E\}.$

Äquivalenz-Satz. *Für* $U \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z})$ *sind äquivalent:*
(i) $U \in \mathrm{GL}\,(2;\mathbb{Z})$.
(ii) $\det U = \pm 1$.
(iii) *U ist invertierbar über $\mathbb{Q}$ und* $U^{-1} \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z})$.
(iv) *Die Abbildung* $U : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$, $x \mapsto Ux$, *ist bijektiv.*
(v) *Die Abbildung* $U : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$, $x \mapsto Ux$, *ist surjektiv.*

Beweis. Die Implikationen (iii) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) sind offensichtlich.
(v) $\Longrightarrow$ (ii): Es gibt also $u, v \in \mathbb{Z}^2$ mit $Uu = \binom{1}{0}$ und $Uv = \binom{0}{1}$, d. h. $UV = E$ für $V := (u, v)$. Durch Determinantenbildung folgt $\det U \cdot \det V = 1$, also (ii).
(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Man verwendet die bekannte Darstellung

$$U^{-1} = \frac{1}{\det U} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad \text{für } \ U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Neben der Gruppe $\mathrm{GL}\,(2;\mathbb{Z})$ betrachtet man noch den Normalteiler

(2) $$\mathrm{SL}\,(2;\mathbb{Z}) := \{U \in \mathrm{GL}\,(2;\mathbb{Z})\ ;\ \det U = 1\}$$

von $\mathrm{GL}\,(2;\mathbb{Z})$, die so genannte *spezielle lineare Gruppe vom Grad 2 über* $\mathbb{Z}$. Wegen

$$\mathrm{GL}\,(2;\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}\,(2;\mathbb{Z}) \cup \mathrm{SL}\,(2;\mathbb{Z}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

hat $\mathrm{SL}\,(2;\mathbb{Z})$ den Index 2 in $\mathrm{GL}\,(2;\mathbb{Z})$. Die Gruppen $\mathrm{GL}\,(2;\mathbb{Z})$ bzw. $\mathrm{SL}\,(2;\mathbb{Z})$ sind „größer“ als man zunächst denkt: Für $U = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}\,(2;\mathbb{Z})$ folgt zunächst $\pm 1 = \det U = ad - bc$, so dass z. B. *c und d teilerfremd sind*. Umgekehrt gilt das

Ergänzungs-Lemma. *Sind $c, d \in \mathbb{Z}$ teilerfremd, dann gibt es eine Matrix*

$$U = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}\,(2;\mathbb{Z}).$$

Hier ist U bis auf einen linksseitigen Faktor der Form $\left(\begin{smallmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ eindeutig bestimmt.

Beweis. Da c, d teilerfremd sind, gibt es $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $ad-bc = 1$, d. h., $U = \left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ gehört zu $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$. Ist $V \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ eine weitere Matrix mit $V = \left(\begin{smallmatrix}* & *\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$, dann folgt

$$VU^{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z}),$$

also notwendig $VU^{-1} = \left(\begin{smallmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$. □

Bemerkungen. a) Das Beispiel $U = 2E$ zeigt, dass man – im Gegensatz zu der analogen Situation über einem Körper – die Bedingung „$U : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ ist injektiv“ nicht in den Äquivalenz-Satz aufnehmen kann.
b) Das Ergänzungs-Lemma erlaubt die Konstruktion von zahllosen Beispielen: Die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 89 & 144 \\ 144 & 233 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 514\,229 & 832\,040 \\ 832\,040 & 1\,346\,269 \end{pmatrix}$$

gehören z. B. zu $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$.
c) Die Ergebnisse dieses Abschnitts lassen sich cum grano salis leicht auf $n \times n$ Matrizen übertragen. Man vergleiche V.1.1 oder M. Koecher [1985], Chap. I, oder M. Newman [1972], Chap. II.

6. Basis-Lemma. *Sei Ω ein Gitter in $\mathbb{C}$ und (ω_1, ω_2) eine Basis von Ω. Für $\omega_1', \omega_2' \in \mathbb{C}$ gilt dann:*
a) *Genau dann gehören ω_1' und ω_2' zu Ω, wenn es ein $U \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z})$ gibt mit*

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}.$$

b) *Genau dann ist (ω_1', ω_2') eine Basis von Ω, wenn die Matrix U in (1) zu $\mathrm{GL}(2;\mathbb{Z})$ gehört.*

Beweis. a) Sind ω_1', ω_2' beliebige Punkte von Ω, dann gibt es $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit

$$\omega_1' = a\omega_1 + b\omega_2\,, \quad \omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2,$$

also

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z}).$$

Gilt umgekehrt $(*)$, so gehören ω_1' und ω_2' zu Ω.
b) Ist (ω_1', ω_2') eine Basis von Ω, dann gibt es auch eine Matrix $V \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z})$ mit der Eigenschaft $\left(\begin{smallmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{smallmatrix}\right) = V \left(\begin{smallmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{smallmatrix}\right)$. Es folgt

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = VU \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} = UV \begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix}.$$

Da aber (ω_1, ω_2) und (ω_1', ω_2') über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind, hat man $VU = UV = E$, also $U \in \mathrm{GL}\,(2;\mathbb{Z})$ nach 5(1).
Ist $U \in \mathrm{GL}\,(2;\mathbb{Z})$, dann sind (ω_1', ω_2') in $(*)$ zunächst linear unabhängig über $\mathbb{R}$. Für beliebige $\omega_1'', \omega_2'' \in \Omega$ gibt es analog ein $W \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z})$ mit

$$\begin{pmatrix}\omega_1''\\ \omega_2''\end{pmatrix} = W\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \begin{pmatrix}\omega_1''\\ \omega_2''\end{pmatrix} = WU^{-1}\begin{pmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{pmatrix}.$$

Damit sind ω_1'', ω_2'' jeweils Linearkombinationen von ω_1', ω_2' über $\mathbb{Z}$. Also ist ω_1', ω_2' eine Basis von Ω. □

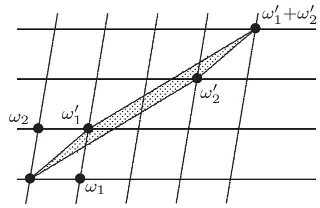

Abb. 4: Grundmaschen

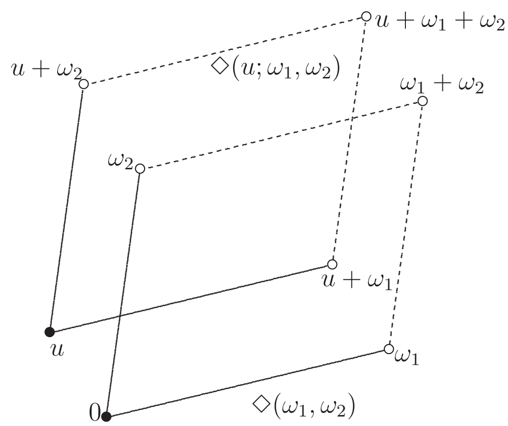

Abb. 5: Periodenparallelogramme

Es sei Ω ein Gitter in $\mathbb{C}$ und (ω_1, ω_2) eine Basis von Ω. Für $u \in \mathbb{C}$ definiert man das *Periodenparallelogramm* (bezüglich ω_1, ω_2 mit *Basispunkt* u) durch

(2) $$\diamond(u;\omega_1,\omega_2) := \{u + \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 \;;\; 0 \le \alpha_1 < 1\,,\, 0 \le \alpha_2 < 1\}.$$

Im Fall $u = 0$ schreibt man auch

(3) $$\diamond(\omega_1,\omega_2) := \diamond(0;\omega_1,\omega_2) = \{\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 \;;\; 0 \le \alpha_1 < 1\,,\, 0 \le \alpha_2 < 1\}$$

und nennt $\diamond(\omega_1,\omega_2)$ auch eine *Grundmasche* des Gitters. Jedes Periodenparallelogramm $P := \diamond(u;\omega_1,\omega_2)$ ist ein *Fundamentalbereich* von $\mathbb{C}$ bezüglich Ω im folgenden Sinne:

Proposition A. *Zu jedem $z \in \mathbb{C}$ gibt es genau ein $\omega \in \Omega$ mit $z + \omega \in P$. Gehören insbesondere z und $z + \omega$, $\omega \in \Omega$, zu P, dann gilt $\omega = 0$.*

Beweis. Man wähle $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ mit $z - u = \xi_1\omega_1 + \xi_2\omega_2$ und reduziere ξ_1 und ξ_2 modulo 1. □

Natürlich gibt es zu jedem Gitter viele Periodenparallelogramme, es gilt aber die

werte sind jeweils paarweise verschieden.
b) Es gibt eine Lösung von $(*)$, in der A eine Diagonalmatrix und B schiefsymmetrisch ist.
7) Man gebe explizit eine biholomorphe Abbildung zwischen dem Einheitskreis und dem Einheitsquadrat $\{z \in \mathbb{C}\,;\ 0 < x, y < 1\}$ in $\mathbb{C}$ an.
8) Sei $\Omega = \mathbb{Z}i\lambda + \mathbb{Z}\lambda$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ ein Quadratgitter. Dann sind die Nullstellen der $\wp$–Funktion genau die Punkte der Menge $\frac{1+i}{2}\lambda + \Omega$. Jede Nullstelle ist von der Ordnung 2.
9) Ist Ω ein Gitter, so dass die WEIERSTRASSsche $\wp$-Funktion nur doppelte Nullstellen hat, dann existiert ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ mit $\Omega = \mathbb{Z}i\lambda + \mathbb{Z}\lambda$.

§4. Die Abhängigkeit vom Gitter

In diesem Paragrafen soll die Abhängigkeit der WEIERSTRASSschen $\wp$–Funktion und der EISENSTEIN–Reihen G_k vom Gitter Ω untersucht werden. Dazu sei $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ stets ein Gitter in $\mathbb{C}$.

1. Homogenität und Basiswechsel. Mit Ω ist natürlich auch $\lambda\Omega$ für jedes $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ ein Gitter in $\mathbb{C}$. Aus 3.1(3) und 3.2(1) folgt sofort

$$\wp_{\lambda\Omega}(\lambda z) = \lambda^{-2} \cdot \wp_\Omega(z) \quad \text{und} \quad G_k(\lambda\Omega) = \lambda^{-k} \cdot G_k(\Omega), \quad k \geq 3. \tag{1}$$

Mit 3.3(2), 3.4(7) und 3.4(8) ergibt sich auch

$$\begin{aligned} g_2(\lambda\Omega) &= \lambda^{-4} \cdot g_2(\Omega), \quad & g_3(\lambda\Omega) &= \lambda^{-6} \cdot g_3(\Omega), \\ \Delta(\lambda\Omega) &= \lambda^{-12} \cdot \Delta(\Omega), \quad & j(\lambda\Omega) &= j(\Omega). \end{aligned} \tag{2}$$

Satz. *Für Gitter Ω und Ω' in $\mathbb{C}$ sind äquivalent:*
(i) *Es gibt ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ mit $\Omega' = \lambda\Omega$.*
(ii) $j(\Omega') = j(\Omega)$.

Beweis. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Man vergleiche (2).
(ii) $\Longrightarrow$ (i): Sei zunächst $j(\Omega') = j(\Omega) \neq 0$. Dann gilt $g_2(\Omega) \neq 0$ und $g_2(\Omega') \neq 0$ nach 3.4(8). Also existiert ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ mit

$$g_2(\Omega') = \lambda^{-4} \cdot g_2(\Omega) = g_2(\lambda\Omega)\,.$$

Mit (2) und 3.4(7) ergibt sich

$$g_3(\Omega') = \pm\lambda^{-6} \cdot g_3(\Omega) = \pm g_3(\lambda\Omega)\,.$$

Ersetzt man ggf. λ durch $i\lambda$, so folgt $g_2(\Omega') = g_2(\lambda\Omega)$ und $g_3(\Omega') = g_3(\lambda\Omega)$. Dann erhält man $\Omega' = \lambda\Omega$ aus Korollar 3.3F. Gilt $j(\Omega) = j(\Omega') = 0$, so folgt $g_2(\Omega) = g_2(\Omega') = 0$ und $g_3(\Omega) \neq 0$ sowie $g_3(\Omega') \neq 0$ aus Korollar 3.4C. Dann erhält man die Behauptung analog. □

Ist (ω_1, ω_2) eine Basis von Ω (vgl. 1.3), so schreibt man auch (vgl. 3.1(1))

(3) $\qquad \wp(z;\omega_1,\omega_2) := \wp_\Omega(z) \quad$ und $\quad G_k(\omega_1,\omega_2) := G_k(\Omega) \quad$ für $k \geq 3$.

Da aber $\wp$ und die G_k nur vom Gitter Ω und nicht von der Wahl einer Basis abhängen, ergibt das Basis-Lemma 1.6 sofort

(4) $\quad \wp(z;\omega_1',\omega_2') = \wp(z;\omega_1,\omega_2) \quad$ und $\quad G_k(\omega_1',\omega_2') = G_k(\omega_1,\omega_2) \quad$ für $k \geq 3$

und

(5) $$\begin{pmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{pmatrix} = U\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad U = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathrm{GL}\,(2;\mathbb{Z}),$$

also für

(6) $\quad \omega_1' = a\omega_1 + b\omega_2\ ,\ \omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2\ $ und $\ a,b,c,d \in \mathbb{Z}\ ,\ ad - bc = \pm 1.$

Für $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ hat dann (1) für $k \geq 3$ auch die Form

(1') $\quad \wp(\lambda z;\lambda\omega_1,\lambda\omega_2) = \lambda^{-2}\cdot\wp(z;\omega_1,\omega_2),\ \ G_k(\lambda\omega_1,\lambda\omega_2) = \lambda^{-k}\cdot G_k(\omega_1,\omega_2)\,.$

Als Basis von Ω sind ω_1, ω_2 über $\mathbb{R}$ linear unabhängig, d. h. $\tau := \omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$. Da mit (ω_1,ω_2) auch $(-\omega_1,\omega_2)$ eine Basis von Ω ist, darf man ohne Einschränkung $\mathrm{Im}\,\tau > 0$ annehmen. Man beachte, dass dies genau dann der Fall ist, wenn das Dreieck $(0,\omega_2,\omega_1)$ positiv orientiert ist. Aus (4) und (1') folgert man daher

(7) $\ \wp(z;\omega_1,\omega_2) = \omega_2^{-2}\cdot\wp(z/\omega_2;\tau,1)\ $ und $\ G_k(\omega_1,\omega_2) = \omega_2^{-k}\cdot G_k(\tau,1)$ für $k \geq 3$.

Zur Untersuchung von elliptischen Funktionen bezüglich Ω darf man daher ohne wesentliche Einschränkung $\omega_2 = 1$, also

$$\Omega = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z} \quad \text{mit} \quad \tau \in \mathbb{H}$$

annehmen. Dabei ist die *obere Halbebene* $\mathbb{H}$ definiert durch

$$\mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Im}\,\tau > 0\}.$$

Wegen

(8) $$\tau' := \frac{\omega_1'}{\omega_2'} = \frac{a\omega_1 + b\omega_2}{c\omega_1 + d\omega_2} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}\,\tau' = \frac{ad - bc}{|c\tau + d|^2}\cdot\mathrm{Im}\,\tau$$

darf man dann aber beim Übergang von der Basis $(\tau,1)$ von Ω zur Basis $(\tau',1)$ des Gitters $\frac{1}{c\tau+d}\Omega$ mit $\tau' \in \mathbb{H}$ nur noch Matrizen $U = \left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ aus der *speziellen linearen Gruppe über* $\mathbb{Z}$, also $\mathrm{SL}\,(2;\mathbb{Z}) := \{U \in \mathrm{GL}\,(2;\mathbb{Z})\ ;\ \det U = 1\}$, zulassen (vgl. 1.5(2)). Damit kann (4) wegen (6) und (1') in der Form

(9) $$\wp\left(\frac{z}{c\tau + d}\,;\,\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\,,\,1\right) = (c\tau + d)^2\cdot\wp(z;\tau,1)$$

bzw.

(10) $$G_k\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d},1\right) = (c\tau + d)^k\cdot G_k(\tau,1) \quad \text{für} \ \ k \geq 4$$