1. Summen von vier und acht Quadraten

Sei k eine natürliche Zahl. Wir interessieren uns dafür, wie oft man eine natürliche Zahl n als Summe von k Quadraten ganzer Zahlen schreiben kann:

$$A_k(n) := \#\{x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{Z}^k; \quad x_1^2 + \dots + x_k^2 = n\}.$$

Wir werden diese Anzahlen in den Fällen $k = 4$ und $k = 8$ bestimmen, und zwar gilt für positives n

$$A_4(n) = 8 \sum_{\substack{4\nmid d,\, d|n \\ 1\le d\le n}} d$$

und

$$A_8(n) = 16 \sum_{\substack{d|n \\ 1\le d\le n}} (-1)^{n-d} d^3.$$

Der Beweis wird auf funktionentheoretischem Wege erbracht. Durch formales Potenzieren erhält man

$$\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{m^2} \right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} A_k(n) q^n.$$

Wir werden zunächst die Funktion

$$\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{m^2} \right)^k$$

(sie konvergiert für $|q| < 1$) durch funktionentheoretische Eigenschaften charakterisieren und die Charakterisierung benutzen, um sie in den Fällen $k = 4$ und $k = 8$ mit Hilfe von EISENSTEINreihen auszudrücken. Obige Formeln für die Darstellungsanzahlen sind eine unmittelbare Folgerung aus diesen funktionentheoretischen Identitäten. Der Fall $k = 4$ ist wesentlich schwieriger als der Fall $k = 8$, da in diesem Fall die EISENSTEINreihe (vom Gewicht 2) nicht absolut konvergiert.

Die zahlentheoretischen Identitäten werden sich aus Identitäten zwischen Modulformen und zwar zwischen Thetareihen und EISENSTEINreihen ergeben. Wir werden die benötigten Identitäten mit möglichst geringen Mitteln ableiten und insbesondere von dem relativ schwierigen Struktursatz VI.6.3 keinen Gebrauch machen.

Die Fourierentwicklung der Eisensteinreihen

Wir erinneren an die Partialbruchentwicklungen des Kotangens und des Negativen seiner Ableitung:

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} \right],$$

$$\frac{\pi^2}{(\sin \pi z)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}.$$

Die beiden Reihen konvergieren in $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$ normal.

Die beiden Reihen sind analytische Funktionen in der oberen Halbebene und haben die Periode 1. Sie müssen sich daher in FOURIERreihen entwickeln lassen.

1.1 Hilfssatz. *Mit* $q = e^{2\pi \mathrm{i} z}$, $\operatorname{Im} z > 0$, *gilt*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} = (2\pi\mathrm{i})^2 \sum_{n=1}^{\infty} n q^n.$$

Beweis. Es ist

$$\pi \cot \pi z = \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = \pi \mathrm{i}\, \frac{q+1}{q-1} = \pi\mathrm{i} - \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-q} = \pi\mathrm{i} - 2\pi\mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

Differenziert man diese Reihe nach z, so ergibt sich

$$\frac{\pi^2}{(\sin \pi z)^2} = (2\pi\mathrm{i})^2 \sum_{n=1}^{\infty} n q^n,$$

was zu beweisen war. □

Durch iteriertes Ableiten nach z erhält man:

1.2 Folgerung. *Für natürliche Zahlen* $k \geq 2$ *gilt*

$$(-1)^k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k} = \frac{1}{(k-1)!} (2\pi\mathrm{i})^k \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n.$$

Wir formen die EISENSTEINreihe

$$G_k(z) = \sum_{(c,d) \neq (0,0)} \frac{1}{(cz+d)^k} \qquad (k \geq 4,\ k \equiv 0 \bmod 2)$$

um:

$$G_k(z) = 2\zeta(k) + 2 \sum_{c=1}^{\infty} \left\{ \sum_{d=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(cz+d)^k} \right\}.$$

Aus 1.2 folgt (man ersetze z durch cz und n durch d)

$$G_k(z) = 2\zeta(k) + \frac{2(2\pi\mathrm{i})^k}{(k-1)!} \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{d=1}^{\infty} d^{k-1} q^{cd}.$$

Wir behaupten nun, dass die Reihe

$$\sum_{c=1}^{\infty}\sum_{d=1}^{\infty} d^{k-1}q^{cd} \quad (|q|<1)$$

für $k \geq 2$, also auch für $k=2$, in $\mathbb{H}$ normal konvergiert. Zunächst formen wir die Reihe um, indem wir alle Terme zu festem cd zusammenfassen. Man erhält dann die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{\substack{d|n\\ 1\leq d\leq n}} d^{k-1}\right\}q^n.$$

Diese Reihe konvergiert für $|q|<1$ wegen der trivialen Abschätzung

$$\sum_{\substack{d|n\\ 1\leq d\leq n}} d^{k-1} \leq n \cdot n^{k-1} = n^k.$$

Da man diese Umformung auch für $|q|$ anstelle von q lesen kann, ist sie nach dem Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen erlaubt.

Dieselben Umformungen zeigen nun umgekehrt, dass die Reihen

$$G_k(z) := \sum_{c=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{\substack{d=-\infty\\ d\neq 0,\ \text{falls } c=0}}^{\infty} (cz+d)^{-k}\right\}$$

für $k \geq 2$, also auch im Falle $k=2$, konvergieren. Wir haben also auch eine Eisensteinreihe G_2 vom Gewicht 2 definiert, allerdings ist die angegebene Klammerung notwendig! Diese Reihe kann keine Modulform sein, da ja jede Modulform vom Gewicht 2 identisch verschwindet. Wir werden sie detailliert untersuchen.

Bezeichnung. $\quad \sigma_k(n) := \sum\limits_{\substack{d|n\\ 1\leq d\leq n}} d^k \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}$.

1.3 Satz (Fourierentwicklung der Eisensteinreihen). *Für gerades $k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\boxed{\begin{aligned} G_k(z) :&= \sum_{c=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{\substack{d=-\infty\\ d\neq 0,\ \text{falls } c=0}}^{\infty} (cz+d)^{-k}\right\} \\ &= 2\zeta(k) + \frac{2\cdot(2\pi \mathrm{i})^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n. \end{aligned}}$$

Die auftretenden Reihen konvergieren normal.

geschrieben werden. Dabei sind $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ und es gilt $ad - bc = 1$.

2. Eine Reihenentwicklung für die G_k. Zur Herleitung einer solchen Entwicklung geht man von einem Gitter der Form

$$\Omega = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z} \quad \text{mit } \operatorname{Im}\tau > 0, \text{ also } \tau \in \mathbb{H}, \tag{1}$$

aus und betrachtet hier τ als beliebig, aber fest. In der Bezeichnung von **1** ist

$$G_k(\tau) := G_k(\tau, 1) = \sum_{m,n}{}' (m\tau + n)^{-k}\ , \quad k \geq 4 \ \text{ gerade}, \tag{2}$$

wobei der Strich an dem Summenzeichen bedeuten soll, dass über alle Paare

$$(0, 0) \neq (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

zu summieren ist. Natürlich kann man die G_k als Abbildungen der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{C}$ auffassen.

Das wesentliche Hilfsmittel besteht nun in der folgenden Verallgemeinerung der Sinus-Partial-bruchentwicklung:

Proposition. *Für alle $\tau \in \mathbb{H}$ und alle ganzen $k \geq 2$ gilt*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (\tau + n)^{-k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \cdot \sum_{r=1}^{\infty} r^{k-1} e^{2\pi i r\tau}. \tag{3}$$

Beweis. Durch Differentiation der Cotangens-Partialbruchentwicklung (vgl. R. Remmert, G. Schumacher [2002], Satz 11.2.1) erhält man die Partialbruchentwicklung

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi\tau}\right)^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\tau + n)^{-2}\ , \quad \tau \in \mathbb{C}, \quad \tau \notin \mathbb{Z}.$$

Die rechte Seite konvergiert dabei in jedem Kompaktum in $\mathbb{C}$, das keinen Punkt von $\mathbb{Z}$ enthält, gleichmäßig. Wählt man hier $\tau \in \mathbb{H}$, so erhält man wegen $|e^{2\pi i\tau}| = e^{-2\pi \operatorname{Im}\tau} < 1$ auch

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi\tau}\right)^2 = \left(\frac{2\pi i}{e^{\pi i\tau} - e^{-\pi i\tau}}\right)^2 = (-2\pi i)^2 e^{2\pi i\tau} \frac{1}{(1 - e^{2\pi i\tau})^2} = (-2\pi i)^2 \cdot \sum_{r=1}^{\infty} r e^{2\pi i r\tau}\ .$$

Die Behauptung (3) ist also für $k = 2$ bewiesen. Da aber beide Seiten lokal gleichmäßig in τ konvergieren, erhält man den allgemeinen Fall durch wiederholte Differentiation nach τ. □

Die linke Seite von (3) ist offenbar in τ periodisch mit der Periode 1, die rechte Seite von (3) gibt diesen Sachverhalt in Form einer Fourier-Reihe wieder. Damit erhalten wir sogleich die Fourier–*Entwicklung* der Eisenstein–Reihen.

Satz. *Für alle $\tau \in \mathbb{H}$ und alle geraden $k \geq 4$ gilt*

$$G_k(\tau) = 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(m) \cdot e^{2\pi i m\tau}\,, \quad \tau \in \mathbb{H}, \tag{4}$$

mit

$$\zeta(s) := \sum_{m=1}^{\infty} m^{-s}\,, \; s > 1, \quad \text{und} \quad \sigma_s(m) := \sum_{d\in\mathbb{N}, d|m} d^s, \;\; s \in \mathbb{R}\,.$$

Die Reihe (4) *konvergiert für $\varepsilon > 0$ in jedem Bereich $\{\tau \in \mathbb{H}\,;\, \mathrm{Im}\,\tau \geq \varepsilon\}$ absolut gleichmäßig. Die G_k sind auf $\mathbb{H}$ holomorph und erfüllen*

$$G_k\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k \cdot G_k(\tau) \quad \text{für alle} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}\,(2;\mathbb{Z})\,. \tag{5}$$

Wegen (4) ist nunmehr klar, dass die G_k für gerades $k \geq 4$ nicht identisch verschwinden.

Beweis. Wegen der absoluten Konvergenz nach dem Konvergenz-Lemma 1.9 für $\Omega = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ kann man (2) umformen in

$$G_k(\tau) = \sum_{n\neq 0} n^{-k} + \sum_{m\neq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}} (m\tau+n)^{-k} = 2\zeta(k) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}} (m\tau+n)^{-k}\,.$$

Jetzt trägt man die Proposition ein und erhält

$$G_k(\tau) = 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \cdot \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} r^{k-1} e^{2\pi i r s\tau}.$$

Schließlich fasst man die Terme mit $rs = m$ zusammen und bekommt (4). Die Holomorphie folgt aus der lokal gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (4) und (5) ist eine Umformulierung von 1(10). □

Mit Hilfe der bekannten Formeln (vgl. M. Koecher [1987], V.5.5)

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}\,, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945} \tag{6}$$

erhält man speziell

$$G_4(\tau) = \frac{\pi^4}{45}\left(1 + 240 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m) \cdot e^{2\pi i m\tau}\right), \tag{7}$$

$$G_6(\tau) = \frac{2\pi^6}{945}\left(1 - 504 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_5(m) \cdot e^{2\pi i m\tau}\right). \tag{8}$$

Bereits 1881 hat A. HURWITZ (1859–1919) in seiner Dissertation (*Math. Werke I*, 1–66) gezeigt, dass die algebraischen Gleichungen, denen die Reihen G_k nach Korollar 3.3D genügen, Anlass zu zahlentheoretischen Aussagen geben. Wir notieren den einfachsten Fall als

Korollar (HURWITZ-*Identität*). *Für alle* $m \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\sigma_7(m) = \sigma_3(m) + 120 \sum_{\substack{r,s \in \mathbb{N} \\ r+s=m}} \sigma_3(r)\sigma_3(s)\,.$$

Beweis. Man verwendet die Identität $7G_8 = 3G_4^2$ gemäß 3.3(4). Trägt man hier (7) und

$$G_8(\tau) = 2\zeta(8) + 2\frac{(2\pi)^8}{7!} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_7(m) \cdot e^{2\pi i m\tau}$$

ein, so erhält man nach Ausmultiplizieren eine Potenzreihenidentität in $q = e^{2\pi i\tau}$. Ein Koeffizientenvergleich ergibt $7\zeta(8) = 6\zeta^2(4)$ und

$$7\frac{2(2\pi)^8}{7!}\sigma_7(m) = 3\frac{\pi^8}{45 \cdot 45}\left(480\sigma_3(m) + 240 \cdot 240 \sum_{r+s=m} \sigma_3(r)\sigma_3(s)\right).$$

Das ist aber die Behauptung. □

Bemerkungen. a) Wer wegen der „Reinheit der Methode“ oder aus anderen Gründen die Werte (6) für $\zeta(4)$ und $\zeta(6)$ nicht als bekannt voraussetzen will, kann diese – und eine lineare Rekursionsformel für die $\zeta(k)$, $k \geq 4$ gerade – aus der Identität 3.3(4) durch Vergleich der Koeffizienten von $e^{2\pi i\tau}$ gewinnen.
b) Die Aussage der Proposition bleibt mit $\Gamma(k)$ statt $(k-1)!$ für beliebiges reelles $k > 1$ richtig und wird dann manchmal nach R. LIPSCHITZ benannt (J. Reine Angew. Math. **105**, 127–156 (1889)).
c) Die im Korollar bewiesene HURWITZ-Identität ist eine Aussage über natürliche Zahlen und als solche Gegenstand der elementaren Zahlentheorie. Es ist bis jetzt jedoch kein Beweis bekannt, der innerhalb der elementaren Zahlentheorie geführt werden kann. Ein unveröffentlichter Beweis, der mit formalen (oder konvergenten) Potenzreihen mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$ arbeitet, stammt von D. ZAGIER und N. SKORUPPA (1978). Man vergleiche auch N. SKORUPPA, J. Number Theory **43**, 68-73 (1993): Für eine Unbestimmte (oder reelle Variable x mit $|x| < 1$) setzt man

$$F_n := F_n(x) := \frac{x^n}{1 - x^n}$$

und bemerkt zunächst die Identität

$$(*) \qquad \sum_n \sigma_r(n) x^n = \sum_m m^r F_m.$$