Satz. *Die Diskriminante $\Delta(\tau)$ besitzt eine* FOURIER-*Entwicklung der Form*

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) \cdot e^{2\pi i m\tau}\ , \quad \tau \in \mathbb{H}, \tag{4}$$

mit Koeffizienten $\tau(m) \in \mathbb{Z}$ und $\tau(1) = 1$. Die Diskriminante $\Delta : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ ist eine holomorphe Funktion mit $\Delta(\tau) \neq 0$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$ und

$$\Delta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^{12} \cdot \Delta(\tau) \quad \textit{für alle} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}\,(2;\mathbb{Z}). \tag{5}$$

Die Bezeichnung der Koeffizienten in (4) mit $\tau(m)$ ist eine Tradition, die beiden τ's sollten hier kein Anlass zur Konfusion sein.

Beweis. Mit den Abkürzungen

$$A := \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m) \cdot e^{2\pi i m\tau}\ , \quad B := \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_5(m) \cdot e^{2\pi i m\tau},$$

hat man nach (2) und (3)

$$\Delta(\tau) = \frac{(2\pi)^{12}}{1728} \cdot ((1 + 240A)^3 - (1 - 504B)^2) = (2\pi)^{12} \cdot (e^{2\pi i\tau} + \ldots) \tag{$*$}$$

und rechts steht eine Potenzreihe in $q = e^{2\pi i\tau}$. Zum Nachweis, dass hier die Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ liegen, hat man zunächst $d^3 \equiv d^5 \,(\mathrm{mod}\ 12)$ für $d \in \mathbb{Z}$ und folglich $\sigma_3(m) \equiv \sigma_5(m) \,(\mathrm{mod}\ 12)$ für $m \in \mathbb{N}$. Bezieht man die Kongruenz also auf die Koeffizienten, so gilt $A \equiv B \,(\mathrm{mod}\ 12)$. Jetzt rechnet man modulo $1728 = 12^3$ und bekommt

$$(1 + 240A)^3 - (1 - 504B)^2 \equiv 12^2(5A + 7B) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 12^3).$$

Der Nenner in $(*)$ kürzt sich also in allen Koeffizienten heraus.

Mit g_2 und g_3 (vgl. Satz 2) ist auch Δ holomorph. Man erhält $\Delta(\tau) \neq 0$ aus Korollar 3.4C. Die Beziehung (5) folgt direkt aus 2(5) und (1). □

(6)

m	$\tau(m)$	Primfaktorzerlegung								
1	1		1							
2	−24	–	2^3	3						
3	252		2^2	3^2		7				
4	−1 472	–	2^6						23	
5	4 830		2	3	5	7			23	
6	−6 048	–	2^5	3^3		7				
7	−16 744	–	2^3			7		13	23	
8	84 480		2^9	3	5		11			
9	−113 643	–		3^4					23	61
10	−115 920	–	2^4	3^2	5	7			23	

4. Die absolute Invariante. Neben der Diskriminante Δ spielt die absolute Invariante j gemäß 3.4(8) eine wichtige Rolle:

$$(1) \qquad j(\tau) := (12g_2(\tau))^3/\Delta(\tau)\ ,\ \tau \in \mathbb{H}.$$

Man beachte, dass $j(\tau)$ wegen Satz 3 für alle $\tau \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}\tau > 0$ erklärt ist. g_2 und Δ sind nach 3(2) und 3(4) durch FOURIER-Reihen in τ darstellbar, also Potenzreihen in $q := e^{2\pi i\tau}$. Zur Herleitung einer entsprechenden Reihe für j benötigt man die

Proposition. *Sind f und g für $|q| < 1$ konvergente Potenzreihen,*

$$f(q) = \sum_{n\geq 0} a_n q^n\ ,\ g(q) = \sum_{n\geq 0} b_n q^n\ ,\ a_n\ ,\ b_n \in \mathbb{Z},$$

mit $b_0 = 1$ und $g(q) \neq 0$ für $|q| < 1$, so ist auch f/g eine für $|q| < 1$ konvergente Potenzreihe mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$.

Beweis. Zunächst sind f und g, also auch f/g für $|q| < 1$ holomorph, also dort in eine Potenzreihe entwickelbar, deren Koeffizienten wir mit c_n bezeichnen. Aus

$$\left(\sum_{n\geq 0} c_n q^n\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 0} b_n q^n\right) = \sum_{n\geq 0} a_n q^n$$

sowie $b_0 = 1$ folgt die Rekursionsformel

$$c_0 = a_0\ ,\ c_m = a_m - \sum_{n=0}^{m-1} c_n b_{m-n}\ ,\ m \geq 1.$$

Also sind alle c_m ganze Zahlen. □

Damit erhalten wir den

Satz A. *Die absolute Invariante $j : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ ist holomorph und besitzt eine FOURIER-Entwicklung der Form*

$$(2) \qquad j(\tau) = e^{-2\pi i\tau} + \sum_{m\geq 0} j_m \cdot e^{2\pi i m\tau} = e^{-2\pi i\tau} + 744 + 196884 \cdot e^{2\pi i\tau} + \dots$$

mit $j_m \in \mathbb{Z}$ für alle $m \geq 0$. Es gilt

$$(3) \qquad j\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = j(\tau) \quad \textit{für alle} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})\,.$$

Beweis. Die Holomorphie folgt mit (1) aus Satz 2 und Satz 3. Spaltet man einen Faktor q aus Δ ab, so kann man die Proposition anwenden und erhält (2) aus 3(2) und 3(4). Schließlich ist (3) eine Konsequenz von 2(5) und 3(5). □

Man wird später (Satz 6.6) sehen, dass die Koeffizienten j_m sogar alle positiv sind. Durch (3) wird gleichzeitig der Name „absolute Invariante“ motiviert. Es gilt aber auch die Umkehrung von (3):

Satz B. *Sind $\tau, \tau' \in \mathbb{H}$ und gilt $j(\tau') = j(\tau)$, dann gibt es eine Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in$ $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ mit*

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $j(\mathbb{Z}\tau' + \mathbb{Z}) = j(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z})$. Es folgt $\mathbb{Z}\tau' + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}\lambda\tau + \mathbb{Z}\lambda$ für ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ aus Satz 1. Dann sind also $(\tau', 1)$ und $(\lambda\tau, \lambda)$ zwei Basen eines Gitters. Nach dem Basis-Lemma 1.6 gibt es daher $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in$ $\mathrm{GL}(2;\mathbb{Z})$ mit $\tau' = a\lambda\tau + b\lambda, 1 = c\lambda\tau + d\lambda$, also $\tau' = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$. Da aber τ und τ' in $\mathbb{H}$ liegen, folgt $\det M = 1$ aus 1(8). □

Eine später in Korollar III.5.2A in schärferer Form zu beweisende Aussage notieren wir bereits jetzt als

Satz C. *Zu jedem $c \in \mathbb{C}$ gibt es ein $\tau \in \mathbb{H}$ mit $j(\tau) = c$.*

Beweis. Wir nehmen an, dass $j(\tau) \neq c$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$ gilt. Dann ist

$$F(\tau) = \frac{j'(\tau)}{j(\tau) - c}$$

holomorph auf $\mathbb{H}$. Wir betrachten das Integral

$$\int_\gamma F(\tau)d\tau\,,\ \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5\,,$$

mit dem Weg $\gamma = \partial G$ aus nebenstehender Abbildung. Aus (3) folgt

$$F(\tau + 1) = F(\tau)\,,\ F(-1/\tau) = \tau^2 \cdot F(\tau)\,.$$

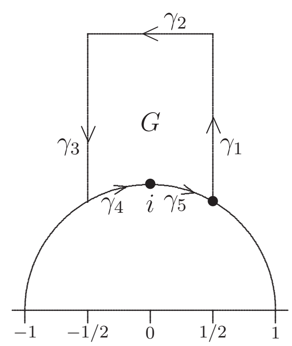

Abb. 10: Integrationsweg

Daraus ergibt sich

$$\int_{\gamma_1} F(\tau)d\tau + \int_{\gamma_3} F(\tau)d\tau = \int_{\gamma_4} F(\tau)d\tau + \int_{\gamma_5} F(\tau)d\tau = 0.$$

Nach der Proposition und (2) besitzt $F(\tau)$ eine Fourier-Entwicklung der Form

$$F(\tau) = \sum_{m \geq 0} a_m e^{2\pi i m\tau}\,, \quad a_0 = -2\pi i\,.$$

Damit erhält man $\int_{\gamma_2} F(\tau)d\tau = 2\pi i$. Mit dem Residuensatz folgt nun

$$2\pi i \cdot \sum_{\tau \in G} \mathrm{ord}_\tau(j - c) = \int_\gamma F(\tau)d\tau = 2\pi i\,.$$

Das ist ein Widerspruch. Also existiert ein $\tau \in \mathbb{H}$ mit $j(\tau) = c$. □

Betrachtet man scheinbar allgemeiner an Stelle von $j(\tau)$, d. h. an Stelle eines Gitters der Form $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$, $\tau \in \mathbb{H}$, die absolute Invariante $j(\Omega)$ für ein beliebiges Gitter Ω von $\mathbb{C}$ gemäß 3.4(8), so zeigt Satz 1

$$(4) \qquad j(\Omega) = j\left(\omega_1/\omega_2\right), \quad \text{falls } \operatorname{Im}\left(\omega_1/\omega_2\right) > 0.$$

Die Bedeutung des Satzes A für elliptische Funktionen liegt nun in dem

Korollar. *Sind $c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ mit $c_2^3 - 27c_3^2 \neq 0$, dann gibt es genau ein Gitter Ω in $\mathbb{C}$ mit*

$$c_2 = g_2(\Omega) \quad \textit{und} \quad c_3 = g_3(\Omega).$$

Beweis. Nach Satz C gibt es ein Gitter Ω mit

$$j(\Omega) = \frac{(12c_2)^3}{c_2^3 - 27c_3^2}.$$

a) $c_2 = 0$: Dann ist $j(\Omega) = 0$, also $g_2(\Omega) = 0$, $g_3(\Omega) \neq 0$. Man wählt nun ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ mit $g_3(\Omega) = \lambda^6 c_3$. Wegen 1(2) folgt

$$g_3(\lambda\Omega) = \lambda^{-6} \cdot g_3(\Omega) = c_3 \quad \text{und} \quad g_2(\lambda\Omega) = \lambda^{-4} \cdot g_2(\Omega) = 0 = c_2.$$

b) $c_2 \neq 0$: Dann ist $j(\Omega) \neq 0$, also $g_2(\Omega) \neq 0$. Man wählt nun ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ mit $g_2(\Omega) = \lambda^4 c_2$. Es folgt $g_2(\lambda\Omega) = c_2$ und aus $j(\lambda\Omega) = j(\Omega)$ erhält man $c_3^2 = g_3^2(\lambda\Omega)$. Die Existenz ergibt sich, indem man ggf. λ durch $i\lambda$ ersetzt.

Die Eindeutigkeit ergibt sich in beiden Fällen aus Korollar 3.3F. □

Bemerkung. Aufgrund des Korollars, das auch als *Inversions–Satz* bezeichnet wird, kann man mit der zugehörigen WEIERSTRASSschen $\wp$–Funktion, die in E.2 genannten Differentialgleichungen und Integrationsprobleme lösen.

5. Berechnung des FAGNANO–Integrals. Wir wenden nun die Ergebnisse an, um das in E.3(1) beschriebene FAGNANO–Integral zu berechnen. Dazu sei

$$(1) \qquad \Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt, \quad s \in \mathbb{C}, \ \operatorname{Re}(s) > 0,$$

die *Gamma–Funktion* (vgl. R. REMMERT [1995], 2.3.2).

Proposition. *Es gilt*

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{4x^3 - 4x}}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - t^4}}\, dt = \frac{\Gamma(1/4)^2}{4\sqrt{2\pi}}.$$