ELLIPTISCHE FUNKTIONEN ([1], S. 14–18)

In Ihrem Vortrag sollen Sie elliptische Funktionen einführen. Wir werden später sehen, dass diese genau die Funktionen auf elliptischen Kurven sind.

Es sei L ein Gitter in der komplexen Zahlenebene, d.h. $L = \{m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$, worin ω_1 und ω_2 zwei über $\mathbb{R}$ lineare unabhängige komplexe Zahlen sind. Wir definieren das von ω_1 und ω_2 aufgespannte Periodenparallelogramm Π durch

$$\Pi = \left\{ a\omega_1 + b\omega_2 \,\middle|\, 0 \leq a \leq 1,\ 0 \leq b \leq 1 \right\}.$$

Wir nennen eine Funktion $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ eine *elliptische Funktion zu dem Gitter L,* falls für alle $\ell \in L$ die Gleichung $f(z + \ell) = f(z)$ gilt. Die Menge aller elliptischen Funktionen zu L bezeichnen wir mit $\mathcal{E}_L$. Zeigen Sie:

Satz 1. *Jede Funktion $f(z) \in \mathcal{E}_L$, die keine Polstelle in Π hat, ist konstant.*

Satz 2. *Wir schreiben $\alpha + \Pi$ für das um $\alpha \in \mathbb{C}$ verschobene Periodenparallelogramm Π. Wenn $f(z) \in \mathcal{E}_L$ keine Polstellen auf dem Rand von $\alpha + \Pi$ hat, dann verschwindet die Summe aller Residuen von $f(z)$ in $\alpha + \Pi$.*

Satz 3. *Es sei $f(z) \in \mathcal{E}_L$ eine Funktion, die keine Polstellen auf dem Rand von $\alpha + \Pi$ hat. Es bezeichnen $\{m_i\}_{i=1}^{M}$ die Ordnungen der Nullstellen von f in $\alpha + \Pi$, sowie $\{n_j\}_{j=1}^{N}$ die Ordnungen der Polstellen. Dann gilt $\sum_{i=1}^{M} m_i = \sum_{j=1}^{N} n_j$.*

Wir definieren die *Weierstrass-$\wp$-Funktion*

$$\wp(z) = \wp(z; L) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\ell \in L \\ \ell \neq 0}} \left(\frac{1}{(z-\ell)^2} - \frac{1}{\ell^2} \right). \tag{1}$$

Man kann zeigen, dass die Reihe (1) absolut und geichmäßig auf jeder kompakten Menge $\mathbb{C} \setminus L$ konvergiert. Beweisen Sie:

Satz 4. *Es gilt $\wp(z) \in \mathcal{E}_L$, $\wp(z)$ ist für $z \notin L$ holomorph und hat in den Gitterpunkten $z \in L$ doppelte Polstellen.*

Geben Sie schließlich folgenden Satz ohne Beweis an:

Satz 5. *Jede elliptische Funktion zu L kann als rationale Funktion in $\wp(z; L)$ und $\wp'(z; L)$ ausgedrückt werden.*

Literatur

[1] N. Koblitz, Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms, Springer, Berlin, 1993.