ELLIPTISCHE KURVEN IN WEIERSTRASS-FORM ([1], S. 22–25)

Im vorangegangenen Vortrag hatten wir zu einem Gitter $L \subset \mathbb{C}$ die elliptischen Funktionen $\wp(z; L)$ und $\wp'(z; L)$ eingeführt. Jede elliptische Funktion $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ zu L kann als rationale Funktion in $\wp(z; L)$ und $\wp'(z; L)$ ausgedrückt werden. Diese elliptischen Funktionen entsprechen genau den meromorphen Funktionen $f : \mathbb{C}/L \to \mathbb{C}$ auf dem *Torus* $\mathbb{C}/L$. Ziel Ihres Vortrages ist es zu zeigen, dass die Funktionen $\wp(z; L)$ und $\wp'(z; L)$ zu einer bijektiven Parametrisierung einer elliptischen Kurve führen.

Wir definieren hierzu die *Eisenstein-Reihe* G_k vom Gewicht $k \in \mathbb{N}$ zu dem Gitter $L \subset \mathbb{C}$ durch

$$G_k = G_k(L) = \sum_{\substack{\ell \in L \\ \ell \neq 0}} \ell^{-k}.$$

Wir schreiben

$$\begin{aligned} g_2 &= g_2(L) = 60G_4, \\ g_3 &= g_3(L) = 140G_6. \end{aligned}$$

Beweisen Sie folgenden Satz:

Satz 1. *Die Funktion $\wp(z)$ erfüllt die Differentialgleichung*

$$\wp'(z)^2 = f(\wp(z)), \tag{1}$$

worin

$$f(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3 \in \mathbb{C}[x].$$

Die Differentialgleichung (1) hat eine elegante geometrische Interpretation. Erinnern Sie an die Definition des projektiven Raums $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ aus dem ersten Vortrag. Wir betrachten folgende Funktion $\varphi = \varphi_L$ auf dem Torus $\mathbb{C}/L$:

$$\begin{aligned} &\varphi : \mathbb{C}/L \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \\ &z \mapsto (\wp(z), \wp'(z), 1) \quad \text{für} \quad z \neq 0 \\ &0 \mapsto (0, 1, 0). \end{aligned} \tag{2}$$

Der Punkt $(0, 1, 0)$ wird der *Punkt im Unendlichen* genannt (s. Vortrag 1).

Erinnern Sie auch an die Definition einer holomorphen Abbildung. Beweisen Sie:

Satz 2. *Die Abbildung* (2) *ist holomorph und bildet $\mathbb{C}/L$ bijektiv auf die elliptische Kurve $y^2 = 4x^3 - g_2(L)x - g_3(L)$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ ab.*

Erklären Sie nun wie man die Umkehrabbildung von φ konstruiert.

Definieren Sie schließlich die *Weierstrass Form*

$$y^2 = 4x^3 - g_2(L)x - g_3(L)$$

einer elliptischen Kurve, worin $L \subset \mathbb{C}$ ein Gitter ist. Wir werden später sehen, dass jede elliptische Kurve über $\mathbb{C}$ in Weierstrass Form geschrieben werden kann.

Literatur

[1] N. Koblitz, Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms, Springer, Berlin, 1993.