DIE HASSE-WEIL-L-FUNKTION ([1], S. 73–75, 79–88)

Im vorangegangenen Vortrag haben wir für $n \in \mathbb{N}$ die Kongruenz-Zeta-Funktionen $Z(E/\mathbb{F}_p;T)$ der elliptischen Kurven $E_n : y^2 = x^3 - n^2x$ untersucht. In diesem Vortrag fügen wir nun diese Funktionen für alle Primzahlen p zu einer einzigen Funktion zusammen, welche dann die Information über die Anzahl der Punkte auf E_n über allen endlichen Körpern trägt.

Erinnern Sie daran, dass für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ die *Riemannsche Zeta-Funktion* wie folgt definiert ist:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p \text{ prime}} \frac{1}{1-p^{-s}}. \tag{1}$$

Wie im vorangegangenen Vortrag, sei α_p durch

$$\#E_n(\mathbb{F}_{p^r}) = p^r + 1 - \alpha_p^r - \overline{\alpha_p}^r$$

gegeben. Wir hatten gesehen, dass $\alpha_p \in \mathbb{Z}[i]$ ein Element mit *Norm* $\mathcal{N}(\alpha_p) = \alpha_p\overline{\alpha_p} = p$ ist, welches kongruent zu $\left(\frac{n}{p}\right)$ modulo $2+2i$ ist, falls $p \equiv 1 \pmod 4$, und für das $\alpha_p = i\sqrt{p}$ gilt, falls $p \equiv 3 \pmod 4$. Wir definieren nun die *Hasse-Weil-L-Funktion*

$$L(E_n, s) = \frac{\zeta(s)\zeta(s-1)}{\prod_p Z(E/\mathbb{F}_p; p^{-s})} = \prod_p \frac{1}{(1-\alpha_p p^{-s})(1-\overline{\alpha_p}p^{-s})}. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass die rechte Seite in (2) für $\mathrm{Re}(s) > \frac{3}{2}$ konvergiert.

Wir nennen $z \in \mathbb{Z}[i]$ einen *gemeinsamen Teiler* von $x, y \in \mathbb{Z}[i]$, falls es $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ gibt mit $\alpha z = x$ und $\beta z = y$. Aufgrund der (bis auf Multiplikation mit den Einheiten $\pm 1, \pm i$) eindeutigen Zerlegung in Primelemente in $\mathbb{Z}[i]$ erhalten wir die Existenz von *größten gemeinsamen Teilern* $\mathrm{ggT}(x,y)$ von $x, y \in \mathbb{Z}[i]$. Für $2 \nmid x$ sei $j_x \in \{0,1,2,3\}$ gegeben durch

$$i^{j_x} x \equiv 1 \pmod{2-2i}.$$

Wir definieren $\chi'_n(x)$ durch

$$\chi'_n(x) = \begin{cases} i^{j_x} & \text{falls } \mathrm{ggT}(x,2) = 1 \text{ und } n = 1, \\ \chi'_1(x)\left(\frac{n}{\mathcal{N}(x)}\right) & \text{falls } \mathrm{ggT}(x,2n) = 1 \text{ und } n > 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Folgende Indentität können Sie ohne Beweis verwenden:

$$\begin{aligned} L(E_n, s) &= \frac{1}{4} \sum_{x \in \mathbb{Z}[i]} \chi'_n(x) x \mathcal{N}(x)^{-s} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{a,b \in \mathbb{Z}} \frac{\chi'_n(a+ib)(a+ib)}{(a^2+b^2)^s}. \end{aligned}$$

Es bezeichne $\mathcal{S}$ den Verktorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, die beschränkt, glatt (d.h. alle partiellen Ableitungen existieren und sind stetig) und schnell fallend (d.h. für jedes $R \in \mathbb{R}$ gilt

$\lim_{|x|\to\infty}\left(|x|^R f(x)\right) = 0$) sind. Die Fourier-Transformierte $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ einer Funktion $f \in \mathcal{S}$ definieren wir als

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot y} f(x)\, dx,$$

worin $x \cdot y$ das Standard-Skalar-Produkt bezeichnet. Sie können die Eigenschaften der Fourier-Transformation auf S. 83 in [1] ohne Beweis verwenden. Leiten Sie nun die *Funktionalgleichung* der Riemannschen Zeta-Funktion her, indem Sie die Werte $\zeta(s)$ und $\zeta(1-s)$ in Beziehung setzen. Um die Funktionalgleichung zu formulieren definieren wir für $\mathrm{Re}(s) > 1$

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt.$$

Die Funktion $\Gamma(s)$ kann meromorph auf ganz $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden mit einfachen Polstellen bei $s \in -\mathbb{N}_0$.

Satz 1. *Die Riemannsche Zeta-Funktion $\zeta(s)$, die in* (1) *für* $\mathrm{Re}(s) > 1$ *definiert wurde, besitzt eine analytische Fortsetzung auf die gesamte komplexe Zahlenebene, mit der Ausnahme einer einfachen Polstelle bei $s = 1$ mit Residuum 1. Desweiteren erfüllt die Funktion*

$$\Lambda(s) = \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

die Gleichung

$$\Lambda(s) = \Lambda(1-s).$$

Leiten Sie analog eine Funktionalgleichung zwischen $L(E_n, s)$ und $L(E_n, 2-s)$ her. Hierzu setzen wir

$$N = \begin{cases} 32n^2 & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \\ 16n^2 & \text{falls } n \text{ gerade ist.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

Satz 2. *Die Hasse-Weil-L-Funktion $L(E_n, s)$, die in* (2) *für* $\mathrm{Re}(s) > \frac{3}{2}$ *definiert wurde, besitzt eine analytische Fortsetzung auf die gesamte komplexe Zahlenebene. Desweiteren erfüllt die Funktion*

$$\Lambda(s) = \frac{\sqrt{N}^s}{2\pi}\,\Gamma(s)\, L(E_n, s)$$

die Gleichung

$$\Lambda(s) = \pm\Lambda(2-s),$$

worin das Vorzeichen ± 1 gleich 1 ist, falls $n \equiv 1, 2, 3 \pmod 8$, und gleich -1 ist, falls $n \equiv 5, 6, 7 \pmod 8$.

Literatur

[1] N. Koblitz, Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms, Springer, Berlin, 1993.