DER KRITISCHE WERT DER HASSE-WEIL-L-FUNKTION ([1], S. 90–97)

Ziel dieses Vortrages ist es, einen Zusammenhang zwischen der Existenz von rationalen Punkten unendlicher Ordnung auf E_n und dem Wert der L-Funktion $L(E_n, s)$ von E_n an der Stelle $s = 1$ herzustellen.

Vermutung (Birch und Swinnerton-Dyer)**.** *Es sei E eine elliptische Kurve über $\mathbb{Q}$. Dann gilt $L(E, 1) = 0$ genau dann, wenn E unendlich viele rationale Punkte hat.*

Den Wert der Hasse-Weil-L-Funktion $L(E, s)$ einer elliptischen Kurve E bei $s = 1$ nennen wir *kritischen Wert.* Obige Vermutung nennen wir die *schwache Birch-Swinnerton-Dyer-Vermutung.* Diese Vermutung spielt eine bedeutende Rolle in der Charakterisierung der kongruenten Zahlen durch Tunnell. Beweisen Sie hierzu folgenden Satz.

Satz 1. *Es sei $n \equiv 5, 6$ oder $7 \pmod 8$. Wir nehmen an, dass die schwache Birch-Swinnerton-Dyer-Vermutung für die Kurve E_n gilt. Dann ist n eine kongruente Zahl.*

Wir gehen im Folgenden auf einige partielle Ergebnisse in Richtung der Birch-Swinnerton-Dyer-Vermutung ein. Wir sagen, dass eine elliptische Kurve E *komplexe Multiplikation* hat, wenn es ein $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gibt, so dass das zu E gehörige Gitter L die Eigenschaft

$$\beta L \subseteq L$$

erfüllt. Sie können folgendes partielles Ergebnis in Richtung der Birch-Swinnerton-Dyer-Vermutung für elliptische Kurven mit komplexer Multiplikation ohne Beweis verwenden.

Satz (Coates und Wiles)**.** *Es sei E eine elliptische Kurve über $\mathbb{Q}$ mit komplexer Multiplikation. Wenn E unendlich viele rationale Punkte hat, dann gilt $L(E, 1) = 0$.*

Formulieren Sie auch folgende partielle Version von Satz 1 ohne auf den Beweis einzugehen.

Satz (Gross und Zagier)**.** *Es sei $n \equiv 5, 6$ oder $7 \pmod 8$. Wir nehmen an, dass $L(E_n, s)$ eine einfache Nullstelle bei $s = 1$ hat. Dann hat E_n unendlich viele rationale Punkte.*

Um Aussagen über die weiteren Kongruenzklassen von $n \pmod 8$ treffen zu können, ist folgende Formel für den kritischen Wert $L(E_n, 1)$ hilfreich. Wir setzen

$$N' = \begin{cases} 8n^2 & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \\ 4n^2 & \text{falls } n \text{ gerade ist.} \end{cases}$$

Beweisen Sie:

Satz 2. *Es sei $n \equiv 1, 2$ oder $3 \pmod 8$ quadratfrei. Dann ist der kritische Wert der Hasse-Weil-L-Funktion der elliptischen Kurve $E_n : y^2 = x^3 - n^2 x$ gleich*

$$L(E_n, 1) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_{m,n}}{m} e^{-\frac{\pi m}{\sqrt{N'}}}.$$

Hierin sind die Koeffizienten $b_{m,n}$ durch folgende Gleichungen definiert:

$$L(E_n, s) = \prod_{p \nmid 2n} \left(1 - 2a_{E_n,p} p^{-s} + p^{1-2s}\right)^{-1} = \sum_{m=1}^{\infty} b_{m,n} m^{-s},$$

$$\#E_n\left(\mathbb{F}_p\right) = p + 1 - a_{E_n,p}.$$

Desweiteren ist der Absolutbetrag der Koeffizienten $b_{m,n}$ *durch* $\sigma_0(m)\sqrt{m}$ *beschränkt, worin* $\sigma_0(m)$ *die Anzahl der Teiler von* m *bezeichnet.*

Zeigen Sie schließlich als Anwendung des Satzes von Coates und Wiles mit Hilfe von Satz 2, dass 1 keine kongruente Zahl ist.

Literatur

[1] N. Koblitz, Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms, Springer, Berlin, 1993.