MODULFORMEN ([?], S. 37–41, 109–111, 149–164)

Dieser Vortrag soll die notwendigen Grundlagen über Modulformen zur Verfügung stellen. Zunächst sollen Modulformen von ganzzahligem Gewicht k eingeführt werden. Definieren Sie hierzu die obere Halbebene $\mathbb{H}$, die Operation von Möbius-Transformationen und den Strich-Operator $|_k$.

Erklären Sie, warum für den Strich-Operator gilt:

$$\left(f\big|_k M_1\right)|_k M_2 = f\big|_k (M_1 M_2).$$

Hierin sind M_1, $M_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \middle| a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ ad-bc=1 \right\}$. Zeigen Sie, warum es außer der Nullfunktion keine Modulformen von ungeradem Gewicht gibt.

Definieren Sie dann meromorphe Modulformen, erinnern Sie dabei auch an die Definition von Laurent- und Fourier-Reihen. Erläutern Sie die Bedingungen für holomorphe Modulformen und Spitzenformen. Zeigen Sie, dass es keine (holomorphen) Modulformen von negativem Gewicht gibt.

Führen Sie als Beispiele von Modulformen Eisenstein-Reihen und die Diskriminantenfunktion ein. Eisenstein-Reihen spielen eine besondere Rolle, da sie den Ring der Modulformen erzeugen und ferner zu elliptischen Kurven in Beziehung stehen.

Definieren Sie die Eisenstein-Reihe G_k und zeigen Sie, dass diese eine Modulform vom Gewicht k ist. In Ihrem Vortrag sollen Sie beweisen:

(1) Jede Modulform von Gewicht k kann als Linearkombination von G_k und einer Spitzenform geschrieben werden.

(2) Die Fourierkoeffizienten a_n einer holomorphen Modulform erfüllen die folgende asymptotische Beziehung

$$a_n = -a_0 \frac{2k}{B_k} \sigma_{k-1}(n) + O\left(n^{\frac{k}{2}}\right).$$

Hierin ist $\sigma_r(n) = \sum_{d|n} d^r$ die r-te Teilerpotenzsumme von n und B_k die k-te Bernoulli-Zahl, definiert durch die erzeugenden Funktion

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!}.$$

(3) Es gilt falls $4 \nmid k$

$$G_k(i) = 0$$

und falls $6 \nmid k$

$$G_k(\rho) = 0,$$

worin $\rho = e^{\frac{\pi i}{3}}$.

Auch die Δ-Funktion

$$\Delta = (60G_4)^3 - 27(140G_6)^2$$

spielt eine große Rolle, u.A. wegen ihrer Beziehung zu elliptischen Kurven und Gittern. Zeigen Sie, dass Δ eine Spitzenform vom Gewicht 12 ist.

Literatur

[1] N. Koblitz, Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms, Springer, Berlin, 1993.