MODULFORMEN ZU KONGRUENZ-UNTERGRUPPEN UND HASSE-WEIL-L-FUNKTIONEN. ([1], S. 138–144)

Im vorangegangenen Vortrag haben wir Modulformen zur vollen Modulgruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ betrachtet. Darüberhinaus interessieren wir uns auch für Modulformen zu einigen speziellen Untergruppen von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. In Ihrem Vortrag sollen Sie diese einführen und auf die zugehörigen Funktionalgleichungen eingehen.

Es sei $N > 0$ eine ganze Zahl. Wir definieren

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \middle| a \equiv d \equiv 1 \pmod{N},\ b \equiv c \equiv 0 \pmod{N} \right\}.$$

Eine Untergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ nennen wir eine *Kongruenz-Untergruppe der Stufe* N, falls $\Gamma \supseteq \Gamma(N)$. Falls N' ein Vielfaches von N ist, so ist jede Kongruenz-Untergruppe der Stufe N auch eine Kongruenz-Untergruppe der Stufe N'. Insbesondere betrachten wir die Kongruenz-Untergruppen

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \middle| c \equiv 0 \pmod{N} \right\},$$
$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \middle| a \equiv 1 \pmod{N} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass diese Mengen tatsächlich Untergruppen von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sind.

Eine *Modulform vom Gewicht k zur Kongruenz-Untergruppe* Γ' ist eine holomorphe Funktion f auf $\mathbb{H}$, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) Für alle $M' \in \Gamma'$ gilt
$$f\big|_k M' = f.$$

(2) Zu jeder Matrix $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gibt es $a_{n,M} \in \mathbb{C}$ ($n \geq 0$) mit
$$f\big|_k M(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,M} e^{\frac{2\pi i n z}{N}}.$$

Gilt darüberhinaus $a_{0,M} = 0$ für alle $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, dann nennen wir f eine *Spitzenform.* Wir definieren die *L-Funktion* einer Spitzenform f durch ($a_n = a_{n,E}$, $E = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$)

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}. \tag{1}$$

Satz 1. *Es sei $f(z)$ eine Spitzenform. Falls $|a_n| = O(n^c)$ mit $c \in \mathbb{R}$, so konvergiert die Reihe $L_f(s)$ aus* (1) *für* $\mathrm{Re}(s) > c + 1$ *und es gilt*

$$L_f(s) = \frac{(-2\pi i)^s}{\Gamma(s)} \int_0^{i\infty} f(z) z^{s-1} dz.$$

Die L-Funktion einer Spitzenform erfüllt, ähnlich wie die Riemannsche Zeta-Funktion und die L-Funktion einer elliptischen Kurve, eine Funktionalgleichung. Wir definieren hierzu ($\mathrm{Re}(s) >$

$c+1$)

$$\Lambda_f(s) = \left(-i\sqrt{N}\right)^s \Gamma(s) L_f(s).$$

Zeigen Sie:

Satz 2. *Es sei $f(z)$ eine Spitzenform vom Gewicht k zu $\Gamma_1(N)$. Es gelte für $C = \pm 1$*

$$f\big|_k \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{smallmatrix}\right) = C i^{-k} f. \tag{2}$$

Dann kann $\Lambda(s) = \Lambda_f(s)$ zur einer ganzen Funktion auf $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden. Desweiteren gilt folgende Funktionalgleichung:

$$\Lambda(s) = C\Lambda(k-s). \tag{3}$$

Die Herleitung von (3) aus (2) weist auf eine enge Beziehung zwischen Dirichlet-Reihen und Funktionalgleichungen von Modulformen hin. Seit längerem ist bekannt, dass die Hasse-Weil-L-Funktion einer elliptischen Kurve (vom Führer N) mit komplexer Multiplikation gleichzeitig auch die L-Funktion einer Modulform vom Gewicht 2 zu $\Gamma_0(N)$ ist. Ein bekanntes Modularitäts-Satz, das nach der wegweisenden Arbeit von Wiles schließlich von Wiles, Taylor, Breuil, Conrad und Diamond bewiesen wurde, besagt, dass die L-Funktion einer beliebigen elliptischen Kurve über den rationalen Zahlen auch die L-Funktion einer Spitzenform zu einer Kongruenz-Untergruppe ist.

Literatur

[1] N. Koblitz, Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms, Springer, Berlin, 1993.