2. 2-TERM REKURSIONEN ([1], S. 3-8)

Beginnen Sie Ihren Vortrag mit der folgenden Definition.

Definition 2.1. Eine *Rekursionsbeziehung* ist eine Gleichung, die, zusammen mit gewissen Anfangsbedingungen, eine Folge rekursiv definiert. Wir nennen ein Rekursionsbeziehung eine n*-Term-Rekursion*, wenn die Gleichung als Funktion in n Folgengliedern geschrieben werden kann.

Wir beschäftigen uns in diesem Vortrag mit 2-Term-Rekursionen. Dafür braucht man stets einen Startwert a_0 und eine Gleichung der Form $a_{n+1} = f(a_n)$ für $n \geq 0$.

Beispiel 2.2. Sei $a_0 = 2$ und

$$a_{n+1} = a_n^2, \qquad (n \geq 0).$$

Dann können wir sukzessive berechnen, dass $a_1 = a_0^2 = 4$, $a_2 = a_1^2 = 4^2 = 16$ ist usw. Wir können jedes Folgenglied a_n berechnen, müssen dafür aber zuerst alle vorhergehenden berechnet haben. Man nennt daher diese rekursive Darstellung der Folge auch eine *offene Form*. Für die meisten Zwecke bevorzugen wir jedoch eine *geschlossene Form*, in der wir das Folgenglied a_n direkt als Funktion von n angeben können und insbesondere nicht alle vorherigen Folgenglieder berechnen müssen.

In diesem Vortrag wird es darum gehen, für eine *lineare* 2-Term-Rekursion (also von der Form $a_{n+1} = \alpha a_n + \beta$) eine solche geschlossene Form zu bestimmen.

Zur Illustration des Vorgehens betrachten wir folgendes einfaches Beispiel,

$$a_{n+1} = 3a_n - 1, \qquad (n \geq 0,\, a_0 = 1).$$

Berechnen Sie zunächst die ersten Folgenglieder mittels der Rekursion. Folgen Sie dann dem Vorgehen auf S. 3-5 in [1], um eine geschlossene Formel für a_n herzuleiten, indem Sie die erzeugende Funktion von a_n bestimmen und ihre Koeffizientenfolge berechnen.

Das nächste Beispiel ist auf S. 5 ff in [1] beschrieben und benutzt das formale Ableiten, das wir schon im letzten Vortrag kennengelernt haben. Betrachten wir dazu die Rekursion

$$a_{n+1} = a_n - 2n, \qquad (n \geq 0, a_0 = 1).$$

Führen Sie zur Erleichterung folgende Notation ein und verwenden Sie diese im Beispiel.

Definition 2.3. Sei $f(x)$ eine formale Potenzreihe in x. Dann schreiben wir $[x^n]f(x)$ für den Koeffizienten von x^n in $f(x)$.

Zum Abschluss geben Sie die Methode zur Bestimmung einer geschlossenen Form für eine lineare 2-term-Rekursion allgemein an, wie auf S. 8 in [1] beschrieben.

Literatur

[1] H. Wilf, *generatingfunctionology*, Internet Edition, Academic Press, Inc, 1994.