4. DIE SIEBMETHODE ([1], S. 110-117)

In diesem Vortrag wird es unter anderem darum gehen Permutationen mit einer gegebenen Anzahl Fixpunkte zu zählen. Geben Sie zunächst die Definition einer Permutation.

Definition 4.1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine *Permutation* von n Objekten ist eine bijektive Abbildung $\pi : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$. Wir schreiben eine Permutation manchmal als Tupel $(\pi(1), \pi(2), ..., \pi(n))$. Ein *Fixpunkt* einer Permutation π ist ein $j \in \{1, ..., n\}$ mit $\pi(j) = j$.

Die Permutation $(2, 1, 3)$ von 3 Objekten hat z.B. genau einen Fixpunkt. Von den $6 = 3!$ Permutationen von 3 Objekten haben 3 genau einen Fixpunkt , nämlich $(1, 3, 2)$, $(3, 2, 1)$ und $(2, 1, 3)$.

Wir wollen das Problem etwas abstrahieren und betrachten eine endliche Menge Ω (im obigen Fall die Menge der Partitionen von n Objekten) und P eine Menge von Eigenschaften der Elemente von Ω (oben kann man z.B. $P = \{1, ..., n\}$ wählen, wobei $r \in P$ für die Eigenschaft „hat genau r Fixpunkte“steht). Im Allgemeinen ist es einfacher die Elemente in Ω zu zählen, die *mindestens* r Eigenschaften aus P besitzen, als diejenigen, die *genau* r Eigenschaften besitzen.

Führen Sie nun ein wenig Notation ein. Es bezeichne also N_r die Anzahl der Elemente in Ω, die mindestens r Eigenschaften erfüllen und für $\omega \in \Omega$ sei $P(\omega)$ die Menge der Eigenschaften von Ω. Weiter wird für $S \subseteq P$ die Anzahl der Elemente in Ω, die mindestens alle Eigenschaften in S erfüllen, mit $N(\supseteq S)$ bezeichnet. Offenbar gilt

$$N_r = \sum_{|S|=r} N(\supseteq S).$$

Hierbei bezeichnet $|M|$ die Anzahl der Elemente in einer endlichen Menge M. Zeigen Sie wie auf S. 111 in [1] beschrieben, dass die Gleichung

$$N_r = \sum_{\omega \in \Omega} \binom{|P(\omega)|}{r}$$

gilt. Beachten Sie, dass wir bei unseren Überlegungen davon ausgehen, dass wir die Zahlen N_r bestimmen können. Die Größe, die uns eigentlich interessiert ist, die Anzahl der Elemente, die genau t Eigenschaften erfüllen. Bezeichnen wir diese mit e_t. Beweisen Sie folgende Aussage.

Satz 4.2. *Mit der oben eingeführten Notation gilt*

$$N_r = \sum_{t=0}^{\infty} \binom{t}{r} e_t.$$

Man beachte, dass die in obigem Satz auftretende Summe tatsächlich endlich ist, da nur endlich viele e_t nicht 0 sind.

Betrachten wir nun die erzeugenden Funktionen $N(x)$ von $\{N_r\}_{r=0}^{\infty}$ und $E(x)$ von $\{e_t\}_{t=0}^{\infty}$. Zeigen Sie nun (vgl. S. 111 in [1]), dass

$$E(x) = N(x-1)$$

gilt. Dies löst natürlich unser Problem, die Zahlen e_t zu bestimmen, die wir nun als Koeffizienten der Potenzreihe $N(x-1)$ ablesen können. Explizit gilt Folgendes.

Folgerung 4.3. *Es gilt*

$$e_t = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j-t} \binom{j}{t} N_j.$$

Nach dieser abstrakten Methode wenden wir uns nun zwei Beispielen zu. Als erstes behandeln wir wie zu Beginn angekündigt Permutationen mit r Fixpunkten. Erinnern Sie daran, dass wir für diese Situation Ω als die Menge der Partitionen von n Objekten und $P = \{1, ..., n\}$ annehmen. Zeigen Sie wie in [1], S. 113 f beschrieben, dass (mit obiger Notation)

$$N(x) = \exp_{|n}(x) = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!} x^r$$

gilt und folgern Sie den

Satz 4.4. *Sei e_t die Anzahl der Partitionen von n Objekten, die genau t Fixpunkte haben. Dann ist die erzeugende Funktion $E(x)$ dieser Zahlen gegeben durch*

$$E(x) = n! \exp_{|n}(x-1).$$

Folgern Sie daraus, dass die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen für große n in etwa $\frac{n!}{e}$ ist.

Als nächstes untersuchen wir *Stirling-Zahlen der zweiten Art* (benannt nach James Stirling, 1692-1770). Diese werden mit $\left\{ {n \atop k} \right\}$ bezeichnet und zählen die Möglichkeiten, eine n-elementige Menge M in k nicht-leere Teilmengen aufzuteilen, so dass keine der Teilmengen eine der anderen schneidet. Man nennt so etwas eine *Partition* der Menge M. Es gibt z.B. 3 Partitionen der Menge $\{1, 2, 3\}$ in 2 Teilmengen, nämlich $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$ und $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$, also gilt $\left\{ {3 \atop 2} \right\} = 3$. Folgen Sie der Beschreibung auf S. 115 f in [1] um folgende Identität für erzeugende Funktionen zu beweisen.

Satz 4.5. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ {n \atop k} \right\} x^k = \exp(-x) \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r^n}{r!} x^r.$$

Folgern Sie daraus, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl

$$b(n) = \frac{1}{e} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r^n}{r!}$$

ganz ist. Man nennt $b(n)$ die n-te *Bell-Zahl* (nach Eric Temple Bell, 1883-1960). Diese gibt die Anzahl der Partitionen einer n-elementigen Menge in nicht-leere Teilmengen beliebiger

Kardinalität an. Verwenden Sie die erzeugende Funktion um folgende exakte Formel für die Stirling-Zahlen der zweiten Art herzuleiten,

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n.$$

Literatur

[1] H. Wilf, *generatingfunctionology*, Internet Edition, Academic Press, Inc, 1994.