5. DIE SCHLANGENÖLMETHODE ([1], S. 118-130

In Ihrem Vortrag sollen Sie die sogenannte Schlangenölmethode erläutern, die sich sehr gut dazu eignet exakte Formeln für kombinatorische Summen herzuleiten. Erklären Sie zunächst die Methode allgemein und wenden Sie sie dann auf mehrere Beispiele an. Angenommen, wir wollen eine Formel für eine Summe herleiten, die von einer freien Variable, sagen wir n, abhängt. Nennen wir diese Summe $f(n)$. Dann bildet man die erzeugende Funktion für die so definierte Zahlenfolge $\{f(n)\}_{n=0}^{\infty}$, vertauscht die Summen und versucht, für die innere Summe eine geschlossene Form zu finden, um dann die gesuchte Formel bestimmen zu können. Um diese Methode erfolgreich verwenden zu können muss man einige Identitäten für Potenzreihen kennen. Geben Sie die folgenden ohne Beweis an. Erinnern Sie an den binomischen Lehrsatz

$$\sum_{r=0}^{\infty} \binom{n}{r} x^r = (1+x)^n.$$

Bereits im 3. Vortrag sind uns die Fibonacci-Zahlen begegnet. Erinnern Sie an ihre rekursive Definition $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

für $n \geq 2$, sowie an ihre erzeugende Funktion

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

Geben Sie außerdem für $k \in \mathbb{N}_0$ die Identitäten

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{2x} \left(1 - \sqrt{1-4x}\right)$$

an. Differenzieren Sie die letzte Gleichung, um die Identität

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$$

zu erhalten.

Folgen Sie nun dem auf S. 120 f beschriebenen Vorgehen um folgende Identität zu beweisen.

Satz 5.1. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{n-k} = F_{n+1}.$$

Geben Sie ein weiteres Beispiel für die Anwendung der Schlangenölmethode um den nächsten Satz zu beweisen.

Satz 5.2. *Für $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{m+2k} \binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} = \binom{n-1}{m-1}.$$

Zeigen Sie anschließend als drittes Beispiel folgenden

Satz 5.3. *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{2k} 2^{n-k} = \frac{2^{2n+1}+1}{3}.$$

Als abschließendes Beispiel betrachten wir die Summen

$$f_n(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \binom{2k}{k} y^k.$$

Hier schafft man es mit der Schlangenölmethode zwar nicht, eine geschlossene Formel für $f_n(y)$ zu finden, man kann aber eine schöne Identität für die erzeugende Funktion

$$F(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(y) x^n$$

finden.

Satz 5.4. *Es gilt die Identität*

$$F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1-x(1+4y))}}.$$

Zeigen Sie damit das folgende Resultat.

Folgerung 5.5. *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \binom{n}{k} (-1)^k 2^{-k} = \begin{cases} \binom{n}{n/2} 2^{-n} & \text{für } n \text{ gerade,} \\ 0 & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Literatur

[1] H. Wilf, *generatingfunctionology*, Internet Edition, Academic Press, Inc, 1994.