6. PARTITIONEN ([1], S. 3-5 UND S. 10-13)

In diesem Vortrag werden wir erzeugende Funktionen benutzen um Eigenschaften der Anzahl der Partitionen einer natürlichen Zahl zu studieren. Beginnen Sie mit der Definition.

Definition 6.1. Sei n eine natürliche Zahl. Dann heißt eine monoton fallende Folge $(\lambda_1, ..., \lambda_k)$ natürlicher Zahlen (die wir oft als $\lambda_1 + ... + \lambda_k$ schreiben) mit $\lambda_1 + ... + \lambda_k = n$ eine *Partition* von n. Die Zahl k heißt die *Länge* der Partition. Die Anzahl der Partitionen von n bezeichnen wir mit $p(n)$ und definieren zur Vereinfachung vieler Formeln $p(0) := 1$.

Zum Beispiel hat die Zahl 5 folgende Partitionen,

$$5, \quad 4+1, \quad 3+2, \quad 3+1+1, \quad 2+2+1, \quad 2+1+1+1, \quad ,1+1+1+1+1,$$

also ist $p(5) = 7$. Wegen ihrer elementaren kombinatorischen Definition, tauchen Partitionsanzahlen in vielen verschiedenen Kontexten auf, so dass es umso wichtiger ist, ihr Verhalten gut zu verstehen. In diesem Vortrag sollen Sie zwei der interessantesten und wichtigsten Identitäten für die erzeugende Funktion

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n$$

beweisen. Erwähnen Sie, dass diese Reihe für $|x| < 1$ konvergiert, beweisen müssen Sie dies nicht.

Der folgende Satz wurde zuerst von Leonhard Euler (1707-1783) bewiesen.

Satz 6.2. *Die erzeugende Funktion der Partitionsfunktion hat folgende Produktdarstellung,*

$$P(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}.$$

Beweisen Sie dies, indem Sie die einzelnen Faktoren des Produktes als geometrische Reihe schreiben und diese dann wie auf S. 3-5 in [1] beschrieben multiplizieren.

Die nächste Identität, die Sie beweisen sollen, geht ebenfalls auf Euler zurück und ist bekannt als der *Pentagonalzahlen-Satz.*

Satz 6.3. *Es gilt*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1-x^k\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n x^{\frac{n(3n-1)}{2}}.$$

Ein wichtiger Schritt zum Beweis ist folgendes Resultat von Fabian Franklin (1853-1939).

Satz 6.4. *Es bezeichne $p_e(\mathcal{D}, n)$ bzw. $p_o(\mathcal{D}, n)$ die Anzahl der Partitionen von n in eine gerade (engl.* even*) bzw. ungerade (engl.* odd*) Anzahl verschiedener Summanden. Dann gilt*

$$p_e(\mathcal{D}, n) - p_o(\mathcal{D}, n) = \begin{cases} (-1)^m & \textit{falls } n = \frac{1}{2}m(3m \pm 1), \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Folgen Sie dem Vorgehen, das auf S. 10-12 beschrieben ist, um dies zu zeigen. Erklären Sie die wesentliche Idee des Beweises von Satz 6.4 (Sie brauchen keinen vollständigen Beweis zu geben) und folgern Sie aus diesem dann den Pentagonalzahlen-Satz 6.3.

Der Pentagonalzahlen-Satz gibt uns nun eine recht effiziente Methode, um $p(n)$ rekursiv zu berechnen, denn nach Satz 6.2 und Satz 6.3 wissen wir, dass

$$P(x)\left(1+\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n x^{\frac{n(3n-1)}{2}}\right)=1$$

gilt. Dies impliziert dann das folgende Resultat.

Folgerung 6.5. *Für $n>0$ haben wir die Rekursion*

$$p(n)=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\left[p\left(n-\frac{3m^2-m}{2}\right)+p\left(n-\frac{3m^2+m}{2}\right)\right],$$

wobei wir $p(n)=0$ setzen, falls $n\notin\mathbb{N}_0$, so dass obige Summe tatsächlich endlich ist.

Literatur

[1] G. Andrews, *The theory of partitions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 2, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Amsterdam, 1976.