7. DIE JACOBISCHE TRIPELPRODUKTIDENTITÄT ([1], S. 17-18 UND S. 21-23)

Ziel dieses Vortrages wird es sein, die wichtige *Jacobische Tripelproduktidentität* (nach Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804-1851) zu beweisen. Diese wird dann im folgenden Vortrag dazu verwendet werden Kongruenzen für Partitionsanzahlen zu beweisen. Führen Sie zunächst als abkürzende Schreibweise die *Pochhammer-Symbole* (nach Leo August Pochhammer, 1841-1920) ein.

$$(a)_n := (a;x)_n = \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 - ax^j\right),$$

sowie an die Konventionen $(a)_0 := 1$ und $(a)_\infty := \prod_{j=0}^{\infty} (1 - ax^j)$. Geben Sie ohne Beweis den so genannten *q-Binomialsatz* ([1], Theorem 2.1) an und beweisen Sie als Folgerung die folgende Identität (vgl. Corollary 2.2 in [1]) .

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n x^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(x)_n} = (-t)_\infty.$$

Formulieren und beweisen Sie nun die Tripelproduktidentität (vgl. Theorem 2.8 in [1]). Die Konvergenz der auftretenden Summen und Produkte auf einem geeigneten Gebiet dürfen Sie als gegeben voraussetzen.

Satz 7.1. *Für $t \neq 0$ gilt*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} t^n x^{n^2} = \left(x^2;x^2\right)_\infty \left(-tx;x^2\right)_\infty \left(-t^{-1}x;x^2\right)_\infty .$$

Beweisen Sie als Spezialfall auch die

Folgerung 7.2. *Es gilt*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n x^{n^2} = \frac{(x)_\infty}{(-x)_\infty},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{(x^2;x^2)_\infty}{(x;x^2)_\infty}.$$

Hiermit können Sie nun auch einen Beweis für den Eulerschen Pentagonalzahlen-Satz angeben, der im letzten Vortrag mit anderen Mitteln bewiesen wurde. In der Formulierung mit Pochhammer-Symbolen lässt sich der Pentagonalzahlen-Satz so formulieren

$$(q)_\infty = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}}.$$

Für den Beweis ersetzen Sie in der Jacobischen Tripelproduktidentität x durch $x^{\frac{3}{2}}$ und erhalten

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} t^n x^{\frac{3n^2}{2}} = \left(x^3;x^3\right)_\infty \left(-tx^{\frac{3}{2}};x^3\right)_\infty \left(-t^{-1}x^{\frac{3}{2}};x^3\right)_\infty .$$

Setzt man nun $t=-x^{\frac{1}{2}}$, so ergibt sich sofort

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n x^{\frac{n(3n-1)}{2}} = \left(x^3;x^3\right)_\infty \left(x;x^3\right)_\infty \left(x^2;x^3\right)_\infty = (x)_\infty .$$

Literatur

[1] G. Andrews, *The theory of partitions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 2, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Amsterdam, 1976.