8. RAMANUJAN-KONGRUENZEN ([1], S. 1-4)

Formulieren Sie zu Beginn Ihres Vortrages die folgenden berühmten Kongruenzen für $p(n)$, die zuerst von Srinivasa Ramanujan (1887-1920) bewiesen wurden.

Satz 8.1 (Ramanujan, 1919)**.** *Für alle $n \geq 0$ gelten die Kongruenzen*

$$\begin{aligned} p(5n+4) &\equiv 0 \pmod{5}, \\ p(7n+5) &\equiv 0 \pmod{7}, \\ p(11n+6) &\equiv 0 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Die ersten beiden dieser Kongruenzen werden Sie in diesem Vortrag beweisen. Verwenden Sie dazu die folgenden Identitäten

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-x)^k = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n x^{\frac{n(3n-1)}{2}}, \tag{8.1}$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-x)^{3k} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n(2n+1)x^{\frac{n(n-1)}{2}}. \tag{8.2}$$

Die Gleichung (8.1) ist der Pentagonalzahlen-Satz, für den wir im letzten und vorletzten Vortrag Beweise gesehen haben. Gleichung (8.2) folgt, wie wir ebenfalls im letzten Vortrag gesehen haben, aus der Jacobischen Tripelproduktidentität.

Beweisen Sie zuerst das allgemeine Theorem 1 in [1]. Der Bemerkung am Anfang von Section 3 in [1] folgend beweisen Sie nun mithilfe dieser Identitäten die ersten beiden Ramanujan-Kongruenzen. Beachten Sie, dass Gleichung (8.1) für die Kongruenz $\pmod{5}$ und Gleichung (8.2) für die Kongruenz $\pmod{7}$ benötigt wird.

Literatur

[1] G. Andrews und R. Roy, *Ramanujan's method in q-series congruences*, Electron. J. Combin. 4 (1997), no. 2, Research Paper 2.