9. DIRICHLET-REIHEN ([1], S. 224-231)

Bis jetzt haben wir als erzeugende Funktionen immer Potenzreihen betrachtet. In diesem Vortrag werden wir eine neue Art von Funktionen einführen, die sich in einigen Situationen besser als erzeugende Funktionen eignen, die sogenannten *Dirichlet-Reihen* (nach Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805-1859). Sei $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge komplexer Zahlen (beachten Sie, dass die Indizierung hier bei $n = 1$ anfängt statt bei $n = 0$). Dann können wir formal die Dirichlet-Reihe zu dieser Folge durch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \tag{9.1}$$

definieren. Die Zahlen $f(n)$ nennen wir auch die *Koeffizienten* der Dirichlet-Reihe.

Oft möchten wir über das formale Rechnen hinausgehen und analytische Methoden auf unsere erzeugende Funktion anwenden, da dies oft stärkere Aussagen hervorbringt. Dazu müssen wir sichergehen, dass der Ausdruck (9.1) auch als Funktion von s zumindest in einer offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$ sinnvoll ist, mit anderen Worten, dass die Reihe dort absolut konvergiert. Wir schreiben von jetzt an $s = \sigma + it$ mit $\sigma, t \in \mathbb{R}$ und merken an, dass $|n^s| = n^\sigma$ gilt. Beweisen Sie folgenden Satz wie auf S. 225 in [1] beschrieben.

Satz 9.1. *Angenommen es gibt komplexe Zahlen s_0, s_1, so dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ für $s = s_0$ konvergiert und für $s = s_1$ divergiert. Dann existiert ein $\sigma_a \in \mathbb{R}$ so dass sie absolut konvergiert für $\sigma > \sigma_a$ und nicht absolut konvergiert für $\sigma < \sigma_a$.*

Die Zahl σ_a nennt man die *Konvergenzabszisse der absoluten Konvergenz* der Dirichlet-Reihe. Weisen Sie in Ihrem Vortrag auf das Analogon dieses Satzes im Zusammenhang mit Potenzreihen hin, dass nämlich eine Potenzreihe einen *Konvergenzradius* besitzt innerhalb dessen sie absolut konvergiert und außerhalb dessen sie nicht konvergiert. Dirichlet-Reihen konvergieren also in (rechten) Halbebenen von $\mathbb{C}$, Potenzreihen in Kreisscheiben.

A priori ist nicht klar, dass Dirichlet-Reihen mit verschiedenen Koeffizienten $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{g(n)\}_{n=1}^{\infty}$ auch verschiedene Funktionen definieren, sofern beide absolut konvergieren. Dies ist aber in der Tat der Fall, was Sie im nächsten Satz, einem Analogon zum Identitätssatz für Potenzreihen, beweisen sollen.

Satz 9.2. *Es seien zwei Dirichlet-Reihen*

$$D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \qquad \textit{und} \qquad D_g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$$

gegeben, die beide für $\sigma > \sigma_a$ konvergieren. Gilt $D_f(s) = D_g(s)$ für alle s in irgendeiner Folge $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ mit $\mathrm{Re}(s_k) \to \infty$ für $k \to \infty$, dann gilt $f(n) = g(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Ähnlich wie Potenzreihen können auch Dirichlet-Reihen multipliziert werden und ihr Produkt ist wieder eine Dirichlet-Reihe.

Satz 9.3. *Seien $D_f(s)$ und $D_g(s)$ Dirichlet-Reihen wie in Satz 9.2. Dann ist ihr Produkt für $\sigma > \sigma_a$ ebenfalls eine absolut konvergente Dirichlet-Reihe*

$$D_f(s)D_g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s},$$

wobei $h(n)$ die sogenannte Dirichlet-Faltung *von f und g ist,*

$$h(n) = (f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Die wahrscheinlich wichtigste Eigenschaft einer Dirichlet-Reihe ist, sofern es existiert, ihr *Euler-Produkt* (nach Leonhard Euler, 1707-1783). Um dies näher zu erläutern definieren Sie die folgende Eigenschaft von komplexwertigen Folgen, die man in diesem Zusammenhang auch *arithmetische Funktionen* nennt.

Definition 9.4. Eine arithmetische Funktion f heißt *multiplikativ*, falls für natürliche Zahlen m, n mit $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$ immer gilt, dass $f(mn) = f(m)f(n)$ ist. Falls sogar für alle $m, n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $f(mn) = f(m)f(n)$ gilt, so heißt f *stark multiplikativ.*

Der folgende Satz gibt das Euler-Produkt einer Dirichlet-Reihe mit einer multiplikativen Koeffizientenfolge an. Folgen Sie dem Beweis auf S. 230 f in [1]

Satz 9.5. *Die Dirichlet-Reihe $D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ sei absolut konvergent für $\sigma > \sigma_a$ und f sei eine multiplikative arithmetische Funktion. Dann besitzt $D_f(s)$ ein Euler-Produkt der Form*

$$D_f(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots\right) \qquad \text{für } \sigma > \sigma_a,$$

wobei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen bezeichnet. Ist f sogar stark multiplikativ, so vereinfacht sich das Euler-Produkt zu

$$D_f(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1 - f(p)p^{-s}}.$$

Führen Sie zum Abschluss als Beispiel die *Riemannsche Zetafunktion* (nach Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826-1866) ein, eine der bekanntesten Funktionen der gesamten Mathematik und sicherlich die berühmteste Dirichlet-Reihe. Sie ist definiert durch

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

und konvergiert, wie Sie aus der Analysis I wissen, für $\sigma > 1$ absolut. Ihr Euler-Produkt ist gegeben durch

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Benutzen Sie nun das Euler-Produkt der Riemannschen Zetafunktion um folgenden Satz aus der elementaren Zahlentheorie zu beweisen.

Satz 9.6. *Die Menge $\mathbb{P}$ der Primzahlen ist unendlich.*

Literatur

[1] T. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1976