10. BERNOULLI- UND EULER-POLYNOME ([1], PP. 92-93, 107-108, [2])

In den bisherigen Vorträgen sind wir fast immer von einer Folge interessanter Zahlen ausgegangen und haben dann über ihre erzeugende Funktion Eigenschaften der Zahlenfolge hergeleitet. Für Bernoulli- und Euler-Zahlen, benannt nach Jakob Bernoulli (1655-1705) und Leonhard Euler (1707-1783), ist es andersherum. Sie werden für gewöhnlich über ihre erzeugende Funktion definiert und stellen sich als äußerst wichtig in der Zahlentheorie heraus.

Definition 10.1. Es seien

$$g(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \qquad |x| < 2\pi,$$

$$h(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} x^n \qquad |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Dann heißen die Zahlen B_n bzw. E_n die *Bernoulli-Zahlen* bzw. *Euler-Zahlen*.

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Definition, dass diese Zahlen eine schöne Rekursion erfüllen. Den Beweis finden Sie auf S. 93 in [1].

Satz 10.2.

(1) *Es gilt* $B_0 = 1$ *und*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. *Insbesondere gilt* $B_n \in \mathbb{Q}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *und* $B_{2n+1} = 0$ *für* $n \in \mathbb{N}$, *während* $B_1 = -\frac{1}{2}$ *ist.*

(2) *Es gilt* $E_0 = 1$ *und*

$$\sum_{\substack{k=0 \\ 2|(n-k)}}^{n} \binom{n}{k} E_k = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. *Insbesondere gilt* $E_n \in \mathbb{Z}$ *und* $E_{2n+1} = 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$.

In vielen Situationen ist es hilfreich, Polynome aus diesen Zahlen zu bilden.

Definition 10.3. Wir definieren die *Bernoulli-Polynome* $B_n(x)$ und *Euler-Polynome* $E_n(x)$ durch

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} x^k \quad \text{and} \quad E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{E_{n-k}}{2^{n-k}} \left(x - \frac{1}{2}\right)^k.$$

Beweisen Sie in den folgenden beiden Sätzen einige Eigenschaften dieser Polynome.

Satz 10.4. *Es gilt, dass*

(1) $B_n(0) = B_n$,
(2) $\frac{d}{dx} B_n(x) = n B_{n-1}(x)$ *for all* $n \in \mathbb{N}$,

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{te^{xt}}{e^t-1}$ *for* $x \in \mathbb{C}$ *and* $|t| < 2\pi$,
(4) $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$ *for all* $n \in \mathbb{N}_0$,
(5) $B_n(x+1) = B_n(x) + nx^{n-1}$ *for all* $n \in \mathbb{N}$.

Einen Beweis hierfür finden Sie auf S. 107 in [1] oder (zum Teil) auf S. 3-4 in [2].

Satz 10.5. *Es gilt, dass*
(1) $E_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{E_n}{2^n}$,
(2) $\frac{d}{dx}E_n(x) = nE_{n-1}(x)$ *for all* $n \in \mathbb{N}$,
(3) $\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{2e^{xt}}{1+e^t}$ *for* $x \in \mathbb{C}$ *and* $|t| < \frac{\pi}{2}$,
(4) $E_n(1-x) = (-1)^n E_n(x)$ *for all* $n \in \mathbb{N}_0$,
(5) $E_n(x+1) = -E_n(x) + 2x^n$.

Da die Beweise für beide Sätze sehr ähnlich sind, reicht es einen von ihnen im Detail vorzuführen.

Geben Sie zum Abschluss Ihres Vortrages folgende Anwendung für die Bernoulli- und Euler-Polynome. Wie Sie noch aus dem ersten Semester wissen werden, ist es eine der beliebtesten Übungen zum Thema vollständige Induktion, Identitäten über Potenzsummen zu beweisen, z.B.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \ldots .$$

Das Problem mit Induktion ist aber, dass man von irgendwoher schon die richtige Identität kennen muss. Mit Bernoulli-und Euler-Polynomen können wir einen geschlossenen Ausdruck für diese und ähnliche Arten von Summen angeben.

Satz 10.6. *Für natürliche Zahlen* n, N *gelten folgende Identitäten,*

$$\sum_{k=1}^{N} k^n = \frac{B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}}{n+1} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} B_j \frac{N^{n+1-j}}{n+1-j},$$

$$\sum_{k=1}^{N} (-1)^k k^n = \frac{E_n(0) - (-1)^{N+1} E_n(N+1)}{2}.$$

Beweisen Sie diesen Satz wie auf S. 108 in [1] und S. 6 in [2] beschrieben.

Literatur

[1] A. Krieg, *Analytische Zahlentheorie*, Skript zur Vorlesung, RWTH Aachen, SS 2009
[2] Z. W. Sun, *An Introduction to Bernoulli- and Euler Polynomials*, Lecture Notes, Taiwan, 2002