11. SPEZIELLE WERTE DER RIEMANNSCHEN ZETAFUNKTION ([1], PP. 173-177)

In diesem Vortrag werden wir die Riemannsche Zetafunktion, die uns schon im 8. Vortrag begegnet ist, an speziellen Punkten auswerten, genauer interessieren uns die Werte

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$$

mit $k \in \mathbb{N}$. Dazu verwenden wir die *Partialbruchzerlegung des Kotangens*, die für sich selbst genommen schon interessant ist.

Satz 11.1. *Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ gilt die Identität*

$$\pi \cot(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right).$$

Der Standardbeweis hierfür verwendet ein wichtiges Resultat der Funktionentheorie, aber der Beweis, den Sie präsentieren werden, kommt mit den Mitteln der Analysis I aus. Dieser Beweis geht auf Gustav Herglotz (1881-1953) zurück. Die zugrundeliegende Idee ist, so viele gemeinsame Eigenschaften der Funktionen

$$f(x) := \pi \cot(\pi x) \quad \text{and} \quad g(x) := \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n}$$

zu beweisen, dass sie keine andere Chance haben als gleich zu sein. Beweisen Sie hierzu die folgenden Lemmata wie auf S. 173-175 in [1] beschrieben.

Lemma 11.2. *Die Funktionen f und g sind beide für alle Werte $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ definiert und dort stetig.*

Lemma 11.3. *Die Funktionen f und g sind beide* 1-periodisch, *d.h. $f(x+1) = f(x)$ und $g(x+1) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.*

Lemma 11.4. *Die Funktionen f und g sind beide* ungerade, *d.h. $f(-x) = -f(x)$ und $g(-x) = -g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.*

Die nächsten beiden Lemmata enthalten den sogenannten *Herglotz-Trick*.

Lemma 11.5. *Die Funktionen f und g genügen beide derselben Funktionalgleichung für $x \notin \mathbb{Z}$,*

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x) \quad \textit{and} \quad g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2g(x).$$

Als Nächstes untersuchen wir die Funktion

$$h(x) := f(x) - g(x) = \pi \cot(\pi x) - \left(\frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2} \right).$$

Es gilt das

Lemma 11.6. *Indem man $h(x) = 0$ für $x \in \mathbb{Z}$ setzt, wird die Funktion h stetig auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt und sie erfüllt die Eigenschaften aus den Lemmata 11.3, 11.4 und 11.5.*

Setzt man dies alles zusammen, erhält man einen Beweis für Satz 11.1.

Wir berechnen nun auf zwei unterschiedliche Arten die Taylor-Reihe von $y\cot(y)$ um $y = 0$ wie auf S. 176 f in [1]. Einerseits erhält man mit Satz 11.1 und der geometrischen Reihe, dass

$$y\cot(y) = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} y^{2k},$$

andererseits ergibt sich über die Exponentialdarstellung des Kotangens die Gleichung

$$y\cot(y) = \frac{z}{2} + \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0} B_{2k} \frac{(2iy)^{2k}}{(2k)!},$$

wobei $z = 2iy$ gilt und B_k die k-te Bernoulli-Zahl bezeichnet, die im letzten Vortrag eingeführt wurde.

Ein Koeffizientenvergleich liefert nun Eulers Formel für $\zeta(2k)$.

Satz 11.7. *Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k}.$$

Speziell haben wir

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \qquad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450},$$
$$\zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555}, \qquad \zeta(12) = \frac{691\pi^{12}}{638512875}.$$

Da $\zeta(2k)$ stets positiv ist und für $k \to \infty$ gegen 1 strebt, erhalten wir sofort folgende Aussage über Bernoulli-Zahlen.

Folgerung 11.8.
(1) *Die Bernoulli-Zahlen B_{2k}, $k \in \mathbb{N}$, haben alternierende Vorzeichen.*
(2) *Betragsmäßig wachsen die Bernoulli-Zahlen B_{2k} für $k \to \infty$ wie $\frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}}$.*

Literatur

[1] M. Aigner and G. M. Ziegler, *Das BUCH der Beweise*, 3. Auflage, Springer-Verlag, 2010.