12. UNIMODALE UND LOG-KONKAVE FOLGEN ([1], S. 136-139)

In diesem Vortrag werden Sie zwei neue Begriffe zur Beschreibung von (endlichen) Folgen reeller Zahlen einführen. Genauer sollen Sie erläutern, wann eine solche Folge *unimodal* bzw. log-*konkav* ist, und einen nützlichen Satz beweisen, mit dem man entscheiden kann, ob eine gegebene Folge eine dieser Eigenschaften besitzt. Beginnen Sie ihren Vortrag mit folgender

Definition 12.1. Eine endliche Folge reeller Zahlen heißt *unimodal*, wenn sie bis zu einem Maximum monoton wächst und dann monoton fällt.

Eine präzisere Formulierung dieser Definition, die Sie ebenfalls angeben sollen, findet sich in Gleichung (4.5.1) in [1]. Zwei wichtige Beispiele für unimodale Folgen sind die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ und die *Stirling-Zahlen erster Art* $\left[{n \atop k}\right]$ (jeweils für festes $n \in \mathbb{N}$). Die letzteren zählen die Permutationen von n Objekten, die aus genau k Zykeln bestehen. Man kann diese Zahlen auch über ihre erzeugende Funktion definieren,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1).$$

Dass die Folge der Binomialkoeffizienten unimodal ist, ist wegen ihrer Symmetrie leicht einzusehen. Geben Sie auch eine Erklärung, warum die Folge der Stirling-Zahlen erster Art unimodal ist, ein formaler Beweis ist hier aber noch nicht erforderlich, da Sie spter in Ihrem Vortrag einen allgemeineren Satz beweisen werden, aus dem dies als einfaches Korollar folgt.

Nachdem Sie Unimodalität eingeführt haben, wenden Sie sich der Definition der log-Konkavität zu. Definieren Sie zunächst, wann eine Funktion f *konkav* genannt wird, nämlich wenn für $x < y$ stets gilt, dass

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \leq f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Veranschaulichen Sie diese Eigenschaft auch graphisch. Natürlich spielt der Logarithmus in der Definition der log-Konkavität eine große Rolle. Konkret kann man eine Folge $c_0, ...c_n$ positiver reeller Zahlen als log-konkav definieren, wenn für alle $j \in \{1, ..., n-1\}$ die Ungleichung

$$\frac{\log(c_{j-1}) + \log(c_{j+1})}{2} \leq \log(c_j) \tag{12.1}$$

erfüllt ist. Wenden Sie nun die Exponentialfunktion auf beiden Seiten von (12.1) an und manipulieren Sie die Ausdrücke ein wenig, um die folgende Definition zu motivieren.

Definition 12.2. Eine Folge $c_0, ..., c_n$ heißt log-*konkav*, falls für alle $j \in \{1, ..., n-1\}$ die Ungleichung $c_{j-1}c_{j+1} \leq c_j^2$ erfüllt ist. Gilt stets die strikte Ungleichung, so nennt man die Folge *strikt* log-konkav.

Beachten Sie, dass in Definition 12.2 die Positivität der Folgenglieder nicht mehr vorausgesetzt ist. Zeigen Sie nun, dass eine log-konkave Folge notwendigerweise unimodal ist.

Wir wollen nun zeigen, dass die Folge der Binomialkoeffizienten und die der Stirling-Zahlen erster Art log-konkav (und damit auch unimodal) ist. Dies folgt aus einem allgemeinen Resultat über Polynome. Präsentieren Sie zunächst folgendes Lemma und seinen Beweis (vgl. Lemma 4.5.1 in [1]).

Lemma 12.3. *Sei* $f(x,y) = c_0x^n + c_1x^{n-1}y + \cdots + c_ny^n \neq 0$ *ein Polynom, dessen Nullstellen* $\frac{x}{y}$ *alle reell sind. Ist* $g(x,y)$ *eine beliebige Ableitung in* x *und* y *von* $f(x,y)$*, die nicht identisch* 0 *ist, so sind auch alle Nullstellen von* $g(x,y)$ *reell.*

Der Beweis basiert auf dem aus der Analysis-Vorlesung bekannten Satz von Rolle, den Sie vor dem Beweis wiederholen sollten. Beweisen Sie mit Hilfe des Lemmas nun folgenden

Satz 12.4. *Sei* $p(x) = c_0 + c_1x + ... + c_nx^n$ *ein Polynom, dessen Nullstellen alle reell und negativ sind. Dann ist die Koeffizientenfolge* $\{c_j\}_{j=0}^n$ strikt log-*konkav.*

Zeigen Sie nun, dass die erzeugenden Funktionen für die Folge der Binomialkoeffizienten bzw. der Stirling-Zahlen erster Art die Voraussetzungen von Satz 12.4 erfüllen und folgern Sie, dass beide Folgen log-konkav sind.

Literatur

[1] H. Wilf, *generatingfunctionology*, Internet Edition, Academic Press, Inc, 1994.