3. FIBONACCI-ZAHLEN UND RANDWERTPROBLEME ([1], S. 8-13)

Nachdem wir uns im letzten Vortrag mit 2-Term-Rekursionen beschäftigt haben, wenden wir uns nun den 3-Term-Rekursionen zu. Die berühmteste solche Rekursion ist die für die Definition der Fibonacci-Zahlen (nach Leonardo da Pisa, gen. Fibonacci, um 1170 - nach 1240). Geben Sie die rekursive Definition

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (n \geq 1,\ F_0 = 0,\ F_1 = 1)$$

an und leiten Sie wie auf S. 8 f in [1] beschrieben die geschlossene Form

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \quad (n \geq 0)$$

sowie die erzeugende Funktion

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

her.

Im zweiten Teil Ihres Vortrages geht es um das 3-*Term-Randwertproblem*: Gegeben sei eine lineare 3-Term-Rekursion für eine Folge $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ und einige *Randwerte* der Folge, aber nicht notwendig die Anfangswerte u_0 und u_1, sondern beispielsweise u_3 und u_{17}. Dann gibt es keine Möglichkeit mehr, die Folgenglieder rekursiv zu bestimmen, aber für einen Spezialfall ist es dennoch möglich die erzeugende Funktion der Folge zu bestimmen.

Wir betrachten die allgemeine Rekursion

$$a u_{n+1} + b u_n + c u_{n-1} = d_n \quad (1 \leq n \leq N-1,\ u_0 = u_N = 0),$$

wobei die Konstanten $a, b, c \in \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$ und die Folge $\{d_n\}_{n=1}^{N-1}$ vorgegeben sind.

Definieren Sie die Potenzreihen (oder eher Polynome)

$$U(x) = \sum_{n=0}^{N} u_n x^n \quad \text{und} \quad D(x) = \sum_{n=1}^{N-1} d_n x^n$$

und leiten Sie dann wie auf S. 10-11 in [1] beschrieben die Identität

$$\left(a + bx + cx^2\right) U(x) = x \left\{ D(x) + a u_1 + c u_{N-1} x^N \right\}$$

her. Erklären Sie nun, wie man die noch unbekannten Werte u_1 und u_{N-1} bestimmen kann. Das gibt uns eine explizite Formel für $U(x)$.

Geben Sie am Ende Ihres Vortrages als Beispiel eine Herleitung für die erzeugende Funktion der Folge $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit

$$u_{n+1} + 2u_n - 3u_{n-1} = d_n \quad (1 \leq n \leq 2, u_0 = u_3 = 0).$$

Als Randwerte geben wir $d_1 = 1$ und $d_2 = -5$ vor.

Literatur

[1] H. Wilf, *generatingfunctionology*, Internet Edition, Academic Press, Inc, 1994.