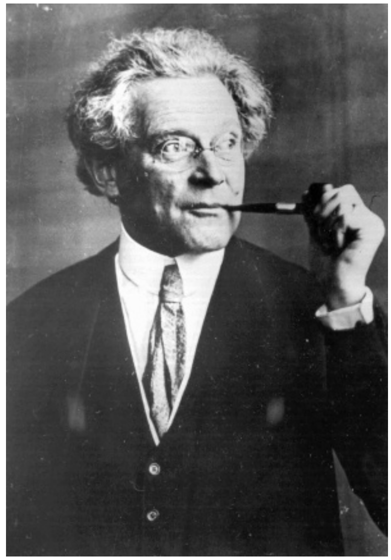
Der Kotangens und der Herglotz-Trick

Was ist die interessanteste Formel in der elementaren Funktionentheorie? In seinem wunderbaren Artikel [2], dessen Darstellung wir folgen, schlägt Jürgen Elstrodt als einen ersten Kandidaten die Partialbruchentwicklung des Kotangens vor:

$$\pi \cot \pi x \quad = \quad \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \Big) \qquad (x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}).$$



Gustav Herglotz

Diese elegante Formel wurde von Euler in §178 seiner *Introductio in Analysin Infinitorum* bewiesen, und sie zählt ohne Zweifel zu den schönsten seiner vielen Entdeckungen. Wir können die Formel sogar noch eleganter in der Form

$$\pi \cot \pi x \quad = \quad \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n} \tag{1}$$

schreiben, aber dann ist bei der Auswertung der Summe $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{x+n}$ etwas Vorsicht geboten, da diese Summe nur bedingt konvergent ist, so dass ihr Wert von der „richtigen“ Reihenfolge bei der Summation abhängt.

Wir werden (1) mit einer Idee von bestechender Einfachheit beweisen, die Gustav Herglotz zugeschrieben wird — dem „Herglotz-Trick“. Dafür setzen wir zunächst

$$f(x) \;\; := \;\; \pi \cot \pi x, \qquad g(x) \;\; := \;\; \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n},$$

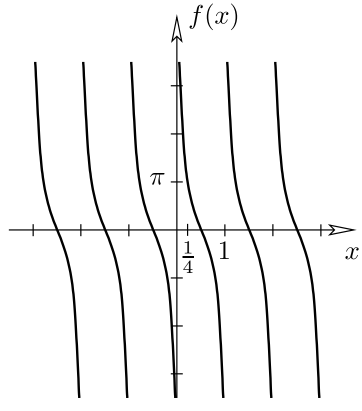
und versuchen, so viele gemeinsame Eigenschaften dieser beiden Funktionen herauszuarbeiten wie möglich, um dann schließlich zu zeigen, dass sie übereinstimmen müssen.

(A) Die beiden Funktionen f und g sind für alle nicht-ganzzahligen Werte definiert und in diesen Werten stetig.

Für die Kotangens-Funktion $f(x) = \pi \cot \pi x = \pi \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x}$ ist dies klar (siehe die nebenstehende Abbildung). Für $g(x)$ verwenden wir zunächst die Identität $\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} = -\frac{2x}{n^2-x^2}$, um Eulers Formel als

$$\pi \cot \pi x \quad = \quad \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} \tag{2}$$

umzuschreiben.



Die Funktion $f(x) = \pi \cot \pi x$

Um **(A)** zu beweisen, müssen wir dann also zeigen, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - x^2}$$

für jedes $x \notin \mathbb{Z}$ in einer Umgebung von x gleichmäßig konvergiert.

Wir haben keine Probleme mit dem ersten Term, für $n = 1$, oder mit den Summanden mit $2n - 1 \leq x^2$, da es nur endlich viele davon gibt. Andererseits sind für $n \geq 2$ und $2n - 1 > x^2$, das heißt $n^2 - x^2 > (n-1)^2 > 0$, die Summanden durch

$$0 \;<\; \frac{1}{n^2 - x^2} \;<\; \frac{1}{(n-1)^2}$$

beschränkt, und diese Schranke gilt nicht nur für x, sondern auch für Werte in einer Umgebung von x. Schließlich zeigt die Tatsache, dass $\sum \frac{1}{(n-1)^2}$ konvergiert (gegen $\frac{\pi^2}{6}$, siehe Seite 49), die gleichmäßige Konvergenz, die wir für den Beweis von **(A)** benötigen.

(B) Sowohl f als auch g sind *periodisch* mit Periode 1, das heißt, es gilt $f(x+1) = f(x)$ und $g(x+1) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

Da der Kotangens die Periode π hat, sehen wir, dass f die Periode 1 besitzt (siehe nochmals die obige Figur). Um dieselbe Periode für g festzustellen, argumentieren wir wie folgt. Sei

$$g_N(x) \;:=\; \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n},$$

dann gilt

$$\begin{aligned} g_N(x+1) \;&=\; \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+1+n} \;=\; \sum_{n=-N+1}^{N+1} \frac{1}{x+n} \\ &=\; g_{N-1}(x) + \frac{1}{x+N} + \frac{1}{x+N+1}. \end{aligned}$$

Also haben wir $g(x+1) = \lim_{N\to\infty} g_N(x+1) = \lim_{N\to\infty} g_{N-1}(x) = g(x)$.

(C) Beide Funktionen f und g sind *ungerade*, das heißt, wir haben $f(-x) = -f(x)$ und $g(-x) = -g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

Die Funktion f besitzt offensichtlich diese Eigenschaft, und für g müssen wir nur bemerken, dass $g_N(-x) = -g_N(x)$ ist.

Die letzten beiden Resultate beinhalten nun, was wir den Herglotz-Trick nennen. Zuerst zeigen wir, dass f und g derselben Funktionalgleichung genügen, und zweitens, dass $h := f - g$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$ erweitert werden kann.

(D) Die Funktionen f und g erfüllen dieselbe Funktionalgleichung: $f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x+1}{2}) = 2f(x)$ und $g(\frac{x}{2}) + g(\frac{x+1}{2}) = 2g(x)$.

Für $f(x)$ erhalten wir dies aus den Additionsformeln für die Sinus- und Kosinus-Funktion:

$$\begin{aligned} f(\tfrac{x}{2}) + f(\tfrac{x+1}{2}) &= \pi\left[\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{\sin\frac{\pi x}{2}} - \frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}\right] \\ &= 2\pi\frac{\cos(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi x}{2})}{\sin(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi x}{2})} \;=\; 2\,f(x). \end{aligned}$$

Additionsformeln:
$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y$
$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x \sin y$
$\Longrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$
$\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x$
$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$
$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$.

Die Funktionalgleichung für g folgt aus

$$g_N(\tfrac{x}{2}) \;+\; g_N(\tfrac{x+1}{2}) \;=\; 2\,g_{2N}(x) \;+\; \frac{2}{x+2N+1},$$

was durch Summation für $-N \le n \le N$ über

$$\frac{1}{\frac{x}{2}+n} + \frac{1}{\frac{x+1}{2}+n} \;=\; 2\Big(\frac{1}{x+2n} + \frac{1}{x+2n+1}\Big)$$

folgt.

Nun betrachten wir die Funktion

$$h(x) \;:=\; f(x) \;-\; g(x) \;=\; \pi\cot\pi x - \Big(\frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{n^2-x^2}\Big). \qquad (3)$$

Wir wissen bereits, dass h eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ ist, die von f und g die Eigenschaften aus **(A)**, **(B)**, **(C)** und **(D)** erbt. Aber was passiert nun an den ganzzahligen Werten? Aus den Reihenentwicklungen des Sinus und Kosinus oder durch zweifache Anwendung der Regeln von de l'Hospital schließen wir

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \ldots$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots$

$$\lim_{x\to 0}\Big(\cot x - \frac{1}{x}\Big) \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x \sin x} \;=\; 0,$$

und somit auch

$$\lim_{x\to 0}\Big(\pi\cot\pi x - \frac{1}{x}\Big) \;=\; 0.$$

Da aber nun die letzte Summe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{n^2-x^2}$ in (3) für $x \longrightarrow 0$ gegen 0 konvergiert, so erhalten wir $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$, und daraus mittels Periodizität

$$\lim_{x\to n} h(x) \;=\; 0 \qquad \text{für } \textit{alle } \; n\in\mathbb{Z}.$$

Insgesamt haben wir damit das folgende Resultat hergeleitet:

(E) Setzen wir $h(x) := 0$ für $x \in \mathbb{Z}$, so wird h eine stetige Funktion auf ganz $\mathbb{R}$, welche die Eigenschaften **(B)**, **(C)** und **(D)** erfüllt.

Nun haben wir alle Mittel zur Hand, um den *coup de grâce* zu führen. Da die Funktion h periodisch und stetig ist, besitzt sie ein Maximum m. Sei x_0 ein Punkt im Intervall $[0,1]$ mit $h(x_0) = m$. Aus **(D)** folgt

$$h(\tfrac{x_0}{2}) + h(\tfrac{x_0+1}{2}) \;=\; 2m,$$

und daher $h(\frac{x_0}{2}) = m$. Iteration ergibt $h(\frac{x_0}{2^n}) = m$ für alle n, und daher $h(0) = m$ wegen der Stetigkeit. Es ist aber $h(0) = 0$, und wir schließen $m = 0$, also $h(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Da aber h eine *ungerade* Funktion ist, wird damit auch $h(x) < 0$ unmöglich, wir erhalten $h(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und der Beweis ist erbracht. $\square$

Aus der Formel (1) können eine Vielzahl von Folgerungen geschlossen werden. Wir wollen die wahrscheinlich berühmteste besprechen, die die Werte der Riemannschen Zeta-Funktion in geraden positiven Zahlen betrifft (siehe den Anhang zu Kapitel 8):

$$\zeta(2k) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \qquad (k \in \mathbb{N}). \tag{4}$$

Um dieses Kapitel abzurunden, werden wir nachvollziehen, wie Euler 1755, also einige Jahre später, die Reihe (4) behandelte. Wir beginnen mit der Formel (2). Wenn wir (2) mit x multiplizieren und $y = \pi x$ setzen, so finden wir für $|y| < \pi$:

$$\begin{aligned} y\cot y &= 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^2}{\pi^2 n^2 - y^2} \\ &= 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^2}{\pi^2 n^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{y}{\pi n}\right)^2}. \end{aligned}$$

Der letzte Faktor ist die Summe einer geometrischen Reihe, also gilt

$$\begin{aligned} y\cot y &= 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{y}{\pi n}\right)^{2k} \\ &= 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}\right) y^{2k}, \end{aligned}$$

und wir erhalten das bemerkenswerte Resultat:

Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist der Koeffizient von y^{2k} in der Reihenentwicklung von $y\cot y$ gleich

$$\left[y^{2k}\right] y\cot y \;=\; -\frac{2}{\pi^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \;=\; -\frac{2}{\pi^{2k}}\zeta(2k). \tag{5}$$

Es gibt noch einen weiteren, vielleicht sogar natürlicheren Weg, um eine Reihenentwicklung von $y \cot y$ zu erhalten. Aus der Analysis kennen wir die Formel $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, woraus

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \qquad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

resultiert, was wiederum

$$y \cot y = iy \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{e^{iy} - e^{-iy}} = iy \frac{e^{2iy} + 1}{e^{2iy} - 1}$$

ergibt. Nun machen wir die Substitution $z = 2iy$ und erhalten

$$y \cot y = \frac{z}{2} \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{z}{2} + \frac{z}{e^z - 1} . \tag{6}$$

Mit anderen Worten, was wir brauchen ist eine Reihenentwicklung der Funktion $\frac{z}{e^z-1}$; man beachte, dass diese Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ wohldefiniert und stetig ist (im Punkt $z = 0$ benutze man dazu die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion oder alternativ die Regel von de l'Hospital, was den Wert 1 ergibt). Wir schreiben

$$\frac{z}{e^z - 1} =: \sum_{n \geq 0} B_n \frac{z^n}{n!} . \tag{7}$$

Die Koeffizienten B_n heißen die *Bernoulli-Zahlen*. Die linke Seite von (6) ist eine *gerade* Funktion (also $f(z) = f(-z)$), woraus sofort $B_n = 0$ für ungerades $n \geq 3$ folgt, während $B_1 = -\frac{1}{2}$ dem Summanden $\frac{z}{2}$ in der Formel (6) entspricht.

Aus

$$\Big(\sum_{n \geq 0} B_n \frac{z^n}{n!} \Big) (e^z - 1) = \Big(\sum_{n \geq 0} B_n \frac{z^n}{n!} \Big) \Big(\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n!} \Big) = z$$

erhalten wir durch Koeffizientenvergleich für z^n:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!(n-k)!} = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, \\ 0 & \text{für } n \neq 1. \end{cases} \tag{8}$$

Aus (8) können wir nun die Bernoulli-Zahlen rekursiv berechnen. Der Wert $n = 1$ ergibt $B_0 = 1$, $n = 2$ ergibt $\frac{B_0}{2} + B_1 = 0$, das heißt $B_1 = -\frac{1}{2}$, und so weiter.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$

Die kleinsten Bernoulli-Zahlen

Nun sind wir schon fast am Ziel: Kombination von (6) und (7) ergibt

$$y \cot y = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k} \frac{(2iy)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} y^{2k},$$

und mit (5) resultiert Eulers Formel für $\zeta(2k)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k} \qquad (k \in \mathbb{N}). \tag{9}$$