MODULFORMEN ([1], S. 109–110, 113, 126–127, 152–158)

Führen Sie in Ihrem Vortrag den Begriff der Modulform ein. Im weiteren Verlauf des Seminares werden wir Modulformen mit Jacobi-Formen vergleichen.

Wir betrachten die Operation von

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ ad - bc = 1 \right\}$$

auf der oberen Halbebene $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ durch Möbiustransformationen

$$\tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Definieren Sie die Strich-Operatoren $|_k$, $k \in \mathbb{Z}$ und zeigen Sie (für $M_1, M_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$):

$$\left(f\big|_k M_1\right)\big|_k M_2 = f\big|_k (M_1 M_2)\,.$$

Führen Sie anschließend den Vektorraum M_k der Modulformen vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ sowie den Raum $S_k \subset M_k$ der *Spitzenformen* vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ ein. Zeigen Sie, dass $M_k = \{0\}$ gilt, falls k ungerade ist.

Folgern Sie aus der Definition, dass eine Modulform eine Fourier-Reihen-Entwicklung hat und geben Sie die Integraldarstellung für die Fourierkoeffizienten $a_f(n)$ $(n \in \mathbb{N})$ an. Zeigen Sie, dass $M_k = \{0\}$ gilt, falls k negativ ist. Schätzen Sie schließlich die Fourierkoeffizienten von Spitzenformen wie folgt ab:

Satz 1. *Es sei $f \in S_k$. Dann gibt es eine Konstante $C_f > 0$, so dass für alle $n \geq 1$ gilt:*

$$|a_f(n)| \leq C_f n^{\frac{k}{2}}.$$

Hierzu definieren wir

$$\widetilde{f}(\tau) = \mathrm{Im}(\tau)^{\frac{k}{2}} \, |f(\tau)|\,.$$

Beweisen Sie zunächst folgendes Lemma:

Lemma 2. *Es sei $f \in S_k$. Dann existiert eine Konstante $C_f > 0$, so dass für jedes $\tau \in \mathbb{H}$ die Ungleichung $|\widetilde{f}(\tau)| \leq C_f$ gilt.*

Um Lemma 2 herzuleiten, können Sie ohne Beweis folgende Tatsache benutzen: Für jedes $\tau \in \mathbb{H}$ gibt es eine Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit

$$-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) \leq \frac{1}{2},$$
$$\left|\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right| \geq 1.$$

Zeigen Sie, dass für $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt:

$$\widetilde{f}\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \widetilde{f}(\tau).$$

Beweisen Sie nun, dass $\widetilde{f}$ auf

$$\left\{ \tau \in \mathbb{H} \;\middle|\; -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(\tau) \leq \frac{1}{2}, \mathrm{Im}(\tau) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

beschränkt ist. Daraus folgt Lemma 2.

Literatur

[1] M. Koecher und A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer-Verlag, Berlin, 1998, 1–331.