JACOBI-THETAREIHEN ([1], S. 127–131)

Wir definieren die *Jacobi-Thetafunktion* $\vartheta : \mathbb{C} \times \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ durch

$$\vartheta(z;\tau) = \sum_{\nu \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}} (-1)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{\pi i \nu^2 \tau + 2\pi i \nu z}.$$

Ziel dieses Vortrags ist der Beweis des folgenden Satzes

Satz 1. *Es gilt die Jacobi-Tripelproduktidentität*

$$\vartheta(z;\tau) = -q^{\frac{1}{8}} \zeta^{-\frac{1}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)\left(1-\zeta q^{n-1}\right)\left(1-\zeta^{-1} q^n\right),$$

wobei $q = e^{2\pi i \tau}$ *und* $\zeta = e^{2\pi i z}$.

Zeigen Sie dazu zunächst die folgenden Lemmata.

Lemma 2. *Die Jacobi-Thetafunktion erfüllt die elliptischen Transformationseigenschaften*

$$\vartheta(z+1;\tau) = -\vartheta(z;\tau) \qquad \text{und} \qquad \vartheta(z+\tau;\tau) = -e^{-\pi i \tau - 2\pi i z} \vartheta(z;\tau).$$

Ist außerdem $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *holomorph mit*

$$f(z+1) = -f(z) \qquad \text{und} \qquad f(z+\tau) = -e^{-\pi i \tau - 2\pi i z} f(z)$$

für ein $\tau \in \mathbb{H}$, *so gilt* $f(z) = C \cdot \vartheta(z;\tau)$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$ *und eine Konstante* $C \in \mathbb{C}$.

Lemma 3. *Die Jacobi-Thetafunktion erfüllt die modularen Transformationseigenschaften*

$$\vartheta(z;\tau+1) = e^{\frac{\pi i}{4}} \vartheta(z;\tau) \qquad \text{und} \qquad \vartheta\left(\frac{z}{\tau}; -\frac{1}{\tau}\right) = -i\sqrt{-i\tau}\, e^{\frac{\pi i z^2}{\tau}} \vartheta(z;\tau).$$

Damit kann $\vartheta(z;\tau)$ als eine Jacobiform vom Gewicht und Index $\frac{1}{2}$ angesehen werden.

Zeigen Sie außerdem

Lemma 4. *Es gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dz} \vartheta(0;\tau) = \eta(\tau)^3.$$

Mithilfe dieser Aussagen kann Satz 1 nun bewiesen werden.

Leiten Sie schließlich das folgende Korollar her.

Korollar 5. *Für die* η*-Funktion gilt die Summendarstellung*

$$\eta(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{12}{n}\right) q^{\frac{n^2}{24}},$$

wobei $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$ *das Kroneckersymbol bezeichnet.*

Literatur

[1] S. Zwegers, Modular Forms I and II, Lecture Notes.