EINFÜHRUNG IN DIE THEORIE DER JACOBI-FORMEN ([1], S. 8-11)

Seien k und m ganze Zahlen. Wir betrachten holomorphe Funktionen in den Veränderlichen $\tau \in \mathbb{H} = \left\{\tau \in \mathbb{C} \middle| \operatorname{Im}(\tau) > 0\right\}$ und $z \in \mathbb{C}$, die für $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ und

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ ad - bc = 1 \right\}$$

folgendermaßen transformieren:

$$\phi\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k \, e^{2\pi i m\left(\frac{cz^2}{c\tau+d}\right)} \phi(\tau, z),$$

$$\phi(\tau, z + \lambda\tau + \mu) = e^{-2\pi i m\left(\lambda^2\tau + 2\lambda z\right)} \phi(\tau, z). \tag{1}$$

Eine solche Funktion ϕ hat eine Fourierentwicklung

$$\phi(\tau, z) = \sum_{n, r \in \mathbb{Z}} c(n, r) e^{2\pi i n\tau} e^{2\pi i r z}.$$

Falls die Koeffizienten mit $\operatorname{sgn}(m)\left(4mn - r^2\right) < 0$ verschwinden, wird ϕ eine *Jacobi-Form vom Gewicht k und Index m* genannt. Hierin ist $\operatorname{sgn}(m) = 1$ für $m \geq 0$ und $\operatorname{sgn}(m) = -1$ für $m < 0$. Es bezeichne $J_{k,m}$ den Raum aller Jacobi-Formen vom Gewicht k und Index m. Verschwinden darüber hinaus die Koeffizienten mit $4mn - r^2 = 0$, so spricht man von *Jacobi-Spitzenformen*, den zugehörigen Raum bezeichnen wir mit $J_{k,m}^{\mathrm{cusp}}$.

Die Einschränkung $\tau \mapsto \phi(\tau, 0)$ einer Jacobi-Form $\phi \in J_{k,m}$ auf $z = 0$ ist eine sogenannte Modulform zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Eine *Modulform vom Gewicht k zu* Γ, einer Untergruppe von endlichem Index in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, ist eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{H}$, welche für $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ die Transformationseigenschaft

$$f(\gamma\tau) = f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k f(\tau)$$

besitzt und „holomorph an den Spitzen" ist. Der Begriff „holomorph an den Spitzen" ist in dem Vortrag einzuführen. Es bezeichne $M_k(\Gamma)$ den Raum aller Modulformen vom Gewicht k zu Γ. Folgendes grundlegende Resultat werden wir ohne Beweis verwenden:

Satz 1. *Der Raum $M_k(\Gamma)$ ist endlich-dimensional.*

In dem Vortrag sollen Sie die Begriffe „Jacobi-Form" und „Jacobi-Spitzenform" einführen und folgenden Satz beweisen:

Satz 2. *Der Raum $J_{k,m}$ ist endlich-dimensional.*

Hierfür können Sie folgenden Satz benutzen, den wir im zweiten Vortrag beweisen werden:

Satz 3. *Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$ und $\phi \in J_{k,m}$. Dann ist die Funktion*

$$f(\tau) = f_{\lambda,\mu}(\tau) = e^{2\pi i m\lambda^2\tau} \phi(\tau, \lambda\tau + \mu)$$

eine Modulform vom Gewicht k zu einer Untergruppe $\Gamma = \Gamma_{\lambda,\mu} \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ von endlichem Index, wobei $\Gamma_{\lambda,\mu}$ nur von λ und μ abhängt.

Es kann nun wie folgt argumentiert werden: Zu $(\lambda_1, \mu_1), \ldots, (\lambda_r, \mu_r) \in \mathbb{Q}^2/\mathbb{Z}^2$ liefert Satz 3 die Abbildung

$$J_{k,m} \to \bigoplus_{i=1}^{r} M_k\left(\Gamma_{\lambda_i,\mu_i}\right) \quad : \quad \phi \mapsto \left(f_{\lambda_i,\mu_i}\right)_{i=1}^{r}. \tag{2}$$

Nach Satz 1 ist der Raum $\bigoplus_{i=1}^{r} M_k\left(\Gamma_{\lambda_i,\mu_i}\right)$ endlich-dimensional. Wir wählen nun $r > 2m$ und verschiedene Paare (λ_i, μ_i). Zeigen Sie, dass dann die Abbildung in (2) injektiv ist. Hierzu untersuchen wir die Nullstellen der Funktion $z \mapsto \phi(\tau, z)$ für festes $\tau \in \mathbb{H}$. Die Transformationseigenschaft (1) zeigt, dass für $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}^2$ gilt:

$$\phi(\tau, z) = 0 \Leftrightarrow \phi(\tau, z + \lambda\tau + \mu) = 0$$

Nun kann man die Anzahl der Nullstellen von ϕ in $\mathscr{F} = \{r\tau + s \,|\, r, s \in [0, 1)\} \subset \mathbb{C}$ bestimmen:

Satz 4. *Falls die Funktion $z \mapsto \phi(\tau, z)$ nicht auf ganz $\mathbb{C}$ verschwindet, so hat sie unter Berücksichtigung von Vielfachheiten genau $2m$ Nullstellen in $\mathscr{F}$.*

Folgern Sie aus diesem Satz, dass $\left(f_{\lambda_i,\mu_i}\right)_{i=1}^{r} = 0$ bereits $\phi \equiv 0$ impliziert. Zeigen Sie auch, dass es keine Jacobi-Formen von negativem Index m gibt.

References

[1] M. Eichler, D. Zagier, The Theory of Jacobi Forms, Progress in Mathematics **55**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985, 1–148.