VON JACOBI-FORMEN ZU MODULFORMEN ([1], S. 11-15)

In diesem Vortrag sollen Sie den Beweis des folgenden Satzes zu Ende führen.

Satz 1. *Der Raum $J_{k,m}$ der Jacobi-Formen vom Gewicht k und Index m ist endlich-dimensional.*

Im ersten Vortrag wurde die Aussage bereits zurückgeführt auf

Satz 2. *Seien $k, m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$, $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$ sowie $\phi \in J_{k,m}$. Dann ist die Funktion*

$$f_{\lambda,\mu}(\tau) = e^{2\pi i m \lambda^2 \tau} \phi\left(\tau, \lambda\tau + \mu\right)$$

eine Modulform vom Gewicht k zu einer Untergruppe $\Gamma = \Gamma_{\lambda,\mu} \subseteq \mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\right)$ von endlichem Index, wobei $\Gamma_{\lambda,\mu}$ nur von λ und μ abhängt.

Der Beweis von Satz 2 greift folgende Idee auf: Setzen wir

$$\phi|_m[\lambda,\mu](\tau,z) = e^{2\pi i m\left(\lambda^2\tau + 2\lambda z\right)}\phi(\tau, z + \lambda\tau + \mu),$$

so erfüllt ϕ für $[\lambda,\mu] \in \mathbb{Z}^2$ nach der Definition einer Jacobi-Form die Identität $\phi = \phi|_m[\lambda,\mu]$. Aus dem ersten Vortrag wissen wir, dass die Einschränkung von ϕ auf $z = 0$ eine Modulform in τ ist. Zeigen Sie, dass auch für $[\lambda,\mu] \in \mathbb{Q}^2$ die Funktion $\phi|_m[\lambda,\mu](\tau,0) = f_{\lambda,\mu}(\tau)$ eine Modulform zu geeignetem $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist, d.h. dass $f_{\lambda,\mu}$ holomorph in den Spitzen ist und für alle $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ gilt:

$$f_{\lambda,\mu}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \left(c\tau+d\right)^k f_{\lambda,\mu}\left(\tau\right). \tag{1}$$

Der Kern des Beweises von (1) sind die beiden Gleichungen ($\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $[\lambda,\mu] \in \mathbb{R}^2$, $[\lambda_2,\mu_2] \in \mathbb{Z}^2$):

$$f_{\lambda,\mu}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k f_{\lambda',\mu'}(\tau) e^{2\pi i m(\lambda'\mu' - \lambda\mu)},$$

$$f_{\lambda+\lambda_2,\mu+\mu_2}(\tau) = f_{\lambda,\mu}(\tau) e^{2\pi i m(-2\lambda_2\mu)}.$$

Hierin ist $[\lambda',\mu'] = [a\lambda + c\mu, b\lambda + d\mu]$. Es folgt, dass die Funktion $f_{\lambda,\mu}$ die Transformationseigenschaft (1) für die Untergruppe

$$\Gamma_{\lambda,\mu} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid (a-1)\lambda + c\mu,\ b\lambda + (d-1)\mu,\ m\left(c\mu^2 + (a-d)\lambda\mu - b\lambda^2\right) \in \mathbb{Z}\right\}$$

erfüllt. Sei $N \in \mathbb{Z}$, so dass $N[\lambda,\mu] \in \mathbb{Z}^2$ gilt. Nun enthält $\Gamma_{\lambda,\mu}$ die Untergruppe

$$\Gamma\left(N^2\right) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \middle| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N^2}\right\},$$

welche endlichen Index in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ hat.

Literatur

[1] M. Eichler, D. Zagier, The Theory of Jacobi Forms, Progress in Mathematics **55**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985, 1–148.