DIE KODIMENSION DES RAUMES DER JACOBI-SPITZENFORMEN ([1], S. 24-25)

Sei $J_{k,m}$ der Raum aller Jacobi-Formen vom Gewicht k und Index m. Jedes $\phi \in J_{k,m}$ besitzt eine Fourierentwicklung

$$\phi(\tau, z) = \sum_{\substack{n,r \in \mathbb{Z} \\ 4mn - r^2 \geq 0}} c(n, r)\, e^{2\pi i n\tau} e^{2\pi i r z}.$$

Verschwinden die Koeffizienten mit $4mn - r^2 = 0$, so sprechen wir von einer Jacobi-Spitzenform. Den Raum aller Jacobi-Spitzenformen vom Gewicht k und Index m bezeichnen wir mit $J_{k,m}^{\mathrm{cusp}}$. Wir wollen die Dimension des Quotientenraumes $J_{k,m}/J_{k,m}^{\mathrm{cusp}}$ bestimmen.

Leiten Sie zunächst aus der Transformationseigenschaft einer Jacobi-Form folgendes Resultat her:

Satz 1. *Sei $\phi \in J_{k,m}$. Die Fourierkoeffizienten $c(n, r)$ hängen nur von $4mn - r^2$ sowie der Kongruenzklasse von r modulo $2m$ ab. Wenn k gerade ist und $m = 1$ oder m eine Primzahl, dann hängt $c(n, r)$ nur von $4mn - r^2$ ab. Wenn $m = 1$ und k ungerade ist, dann gilt $\phi \equiv 0$.*

Dieser Satz liefert eine obere Schranke für die Dimension von $J_{k,m}/J_{k,m}^{\mathrm{cusp}}$. Zeigen Sie für $k > 2$, dass diese Schranke angenommen wird:

Satz 2. *Sei $k > 2$. Die Dimension von $J_{k,m}/J_{k,m}^{cusp}$ ist gleich $\left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor + 1$, falls k gerade ist, und gleich $\left\lfloor \frac{b-1}{2} \right\rfloor$, falls k ungerade ist. Hierin ist $b \in \mathbb{N}$ maximal mit $b^2 \mid m$.*

Wenden Sie hierfür die Konstruktion aus Vortrag 3 auf die Funktionen $f_s(\tau, z) = e^{2\pi i a s^2 \tau} e^{2\pi i a b s z}$ mit $m = ab^2$ an, um die Reihen

$$E_{k,m,s} = \sum_{\gamma \in \Gamma_{f_s}^J \backslash \Gamma^J} f_s|_{k,m}\gamma$$

zu definieren. Zeigen Sie, dass für gerade k die Reihen $(E_{k,m,s})_{0 \leq s \leq \frac{b}{2}}$ und für ungerade k die Reihen $(E_{k,m,s})_{0 < s < \frac{b}{2}}$ eine Basis des Quotientenraumes $J_{k,m}/J_{k,m}^{\mathrm{cusp}}$ bilden.

References

[1] M. Eichler, D. Zagier, The Theory of Jacobi Forms, Progress in Mathematics **55**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985, 1–148.