DIE TAYLOR-ENTWICKLUNG VON JACOBI-FORMEN ([1], S. 28-34)

Sei ϕ eine Jacobi-Form vom Gewicht m und Index k. Wir betrachten die Taylor-Entwicklung

$$\phi(\tau, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \chi_\nu(\tau) z^\nu.$$

Sei $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Aus der Transformationseigenschaft

$$\phi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k e^{2\pi i m\left(\frac{cz^2}{c\tau+d}\right)} \phi(\tau, z)$$

erhalten wir

$$\chi_\nu\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^{k+\nu}\left(\chi_\nu(\tau) + \frac{2\pi imc}{c\tau+d}\chi_{\nu-2}(\tau) + \frac{1}{2!}\left(\frac{2\pi imc}{c\tau+d}\right)^2 \chi_{\nu-4}(\tau) + \dots\right), \tag{1}$$

d.h. χ_ν transformiert bis auf einen Korrekturterm, der aus den Taylor-Koeffizienten χ_n mit $n < \nu$ zusammengesetzt ist, wie eine Modulform vom Gewicht $k+\nu$. Beweisen Sie:

Satz 1. *Die Funktion*

$$\xi_\nu(\tau) = \sum_{0 \le \mu \le \frac{\nu}{2}} \frac{(-2\pi i m)^\mu (k+\nu-\mu-2)!}{(k+\nu-2)!\mu!} \chi_{\nu-2\mu}^{(\mu)}(\tau)$$

ist eine Modulform vom Gewicht $k+\nu$ *für* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Für den Beweis können Sie annehmen, dass $\chi_\nu \equiv 0$ für ungerade ν gilt. Wir definieren

$$M_{k,m}^+ = \left\{ \phi(\tau, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \chi_{2\nu}(\tau) z^{2\nu} \,\middle|\, \chi_{2\nu} \text{ erfüllt (1) und ist holomorph} \right\}.$$

Zeigen Sie dann, dass der Operator

$$L_k = 8\pi i m \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{2k-1}{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

den Raum $M_{k,m}^+$ nach $M_{k+2,m}^+$ abbildet. Zeigen Sie: Für $\phi(\tau, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \chi_{2\nu}(\tau) z^{2\nu} \in M_{k,m}^+$ gilt

$$(L_{k+2\nu-2} \circ L_{k+2\nu-4} \circ \dots \circ L_k)\, \phi(\tau, 0) = (-4)^\nu \nu! \xi_{2\nu}(\tau).$$

Hierbei ist die linke Seite nach Definition von $M_{k,m}^+$ eine Modulform und somit folgt Satz (1).

Drücken Sie schließlich für gerade ν die Fourier-Entwicklung der Modulform ξ_ν mit Hilfe der Fourier-Koeffizienten $c(n, r)$ von

$$\phi(\tau, z) = \sum_{\substack{n,r \in \mathbb{Z} \\ 4mn - r^2 \ge 0}} c(n, r) e^{2\pi i n\tau} e^{2\pi i r z}$$

aus. Zeigen Sie:

$$\chi_\nu(\tau) = \frac{1}{\nu!} \sum_{n \ge 0} \left(\sum_{\substack{r \in \mathbb{Z} \\ 4mn - r^2 \ge 0}} (2\pi i r)^\nu c(n, r) \right) e^{2\pi i n\tau},$$

$$\xi_\nu(\tau) = (2\pi i)^\nu \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{\substack{r\in\mathbb{Z} \\ 4mn-r^2\geq 0}} \left(\sum_{0\leq\mu\leq\frac{\nu}{2}} \frac{(k+\nu-\mu-2)!}{(k+\nu-2)!} \frac{(-mn)^\mu r^{\nu-2\mu}}{\mu!(\nu-2\mu)!} \right) c(n,r) \right) e^{2\pi i n\tau}$$

und somit

$$(2\pi i)^{-2\nu} \frac{(k+2\nu-2)!(2\nu)!}{(k+\nu-2)!} \xi_{2\nu}(\tau) = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{\substack{r\in\mathbb{Z} \\ 4mn-r^2\geq 0}} P_{2\nu}^{(k-1)}(r,nm) c(n,r) \right) e^{2\pi i n\tau}.$$

Hierin ist $P_{2\nu}^{(k-1)}$ das homogene Polynom in zwei Veränderlichen definiert durch

$$\frac{(k+\nu+2)!}{(2\nu)!\,(k-2)!} P_{2\nu}^{(k-1)}(r,n) = \text{Koeffizient von } t^{2\nu} \text{ in } \left(1-rt+nt^2\right)^{1-k}.$$

Zusammen mit der Fourierentwicklung der Jacobi-Eisensteinreihen $E_{k,1}$ folgert man ein Theorem von Cohen.

Korollar 2 (Cohens Theorem)**.** Sei k gerade und

$$H(k-1,N) := \begin{cases} L_{-N}(2-k) & \text{falls } N>0 \text{ und } N\equiv 0 \text{ oder } 3 \pmod 4, \\ \zeta(3-2k) & \text{falls } N=0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist für jedes $\nu\in\mathbb{N}_0$ die Funktion

$$\sum_{n\geq 0} \left(\sum_{r^2\leq 4n} P_{2\nu}^{(k-1)}(r,n) H(k-1, 4n-r^2) \right) e^{2\pi i n\tau}$$

eine Modulform vom Gewicht $k+2\nu$ für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Literatur

[1] M. Eichler, D. Zagier, The Theory of Jacobi Forms, Progress in Mathematics **55**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985, 1–148.