DIE THETA-ZERLEGUNG ([1], S. 57-59)

Sei ϕ eine Jacobi-Form vom Gewicht k und Index $m > 0$. Wir betrachten die Fourierentwicklung

$$\phi\left(\tau, z\right)=\sum_{\substack{n, r \in \mathbb{Z} \\ 4mn-r^2 \geq 0}} c\left(n, r\right) e^{2\pi i n\tau} e^{2\pi i r z}.$$

Im vierten Vortrag hatten wir gezeigt, dass $c(n,r)$ nur von $d = 4mn - r^2$ und r modulo $2m$ abhängt. Daher können wir $C_r(d) = c(n,r)$ setzen. Auf Grund der Transformationseigenschaft

$$\phi(\tau, z+\tau)=e^{-2\pi i m(\tau+2z)}\phi\left(\tau, z\right)$$

hängt h_μ in

$$\phi(\tau, z)=\sum_{\mu \in \mathbb{Z}} e^{\frac{\pi i \mu^2 \tau}{2m}} h_\mu(\tau) e^{2\pi i \mu z}$$

nur von μ modulo $2m$ ab. Wir erhalten daher die *Theta-Zerlegung*

$$\phi(\tau, z)=\sum_{\mu \in \mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}} h_\mu(\tau)\vartheta_{m,\mu}(\tau, z)$$

mit

$$\vartheta_{m,\mu}(\tau, z)=\sum_{\substack{r \in \mathbb{Z} \\ r \equiv \mu \pmod{2m}}} e^{\frac{\pi i r^2 \tau}{2m}} e^{2\pi i r z},$$

$$h_\mu(\tau)=\sum_{d \geq 0} C_\mu(d) e^{\frac{\pi i d \tau}{2m}}.$$

Zeigen Sie (s. Anlage), dass die Theta-Reihen $\vartheta_{m,\mu}$ die Transformationseigenschaften

$$\begin{aligned}
\vartheta_{m,\mu}\left(\tau+1, z\right) &= e^{\frac{\pi i \mu^2}{2m}}\vartheta_{m,\mu}\left(\tau, z\right), \\
\vartheta_{m,\mu}\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}\right) &= \sqrt{\frac{\tau}{2mi}}\, e^{\frac{2\pi i m z^2}{\tau}} \sum_{\nu \pmod{2m}} e^{-\frac{\pi i \mu\nu}{m}}\vartheta_{m,\nu}\left(\tau, z\right)
\end{aligned}$$

besitzen. Folgern Sie, dass die Koeffizienten $\left(h_\mu\right)_{\mu \in \mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}}$ der Theta-Zerlegung folgende Transformationseigenschaften besitzen:

$$\begin{aligned}
h_\mu\left(\tau+1\right) &= e^{-\frac{\pi i \mu^2}{2m}} h_\mu\left(\tau\right), \\
h_\mu\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= \tau^k\sqrt{\frac{i}{2\pi\tau}} \sum_{\nu \pmod{2m}} e^{\frac{\pi i \mu\nu}{m}} h_\nu\left(\tau\right).
\end{aligned}$$

Zeigen Sie auch $h_{-\mu} = \left(-1\right)^k h_\mu$, d.h. $\left(h_\mu\right)_{\mu \in \mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}}$ ist bereits durch jene h_μ mit $0 \leq \mu \leq m$ eindeutig bestimmt.

Literatur

[1] M. Eichler, D. Zagier, The Theory of Jacobi Forms, Progress in Mathematics **55**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985, 1–148.

Beweis der Transformationseigenschaft der Theta-Reihen

Wir wollen folgende Transformationseigenschaft der *Jacobi-Theta-Reihe*

$$\vartheta_{m,\mu}(\tau, z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{\frac{\pi i(\mu+2mk)^2\tau}{2m}} e^{2\pi i(\mu+2mk)z}$$

beweisen:

$$\vartheta_{m,\mu}\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{2mi}}\, e^{\frac{2\pi imz^2}{\tau}} \sum_{\nu \pmod{2m}} e^{-\frac{\pi i\mu\nu}{m}} \vartheta_{m,\nu}(\tau, z)\,.$$

Hierzu betrachten wir den Raum

$$\mathcal{S} = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \,\middle|\, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N} : \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^\alpha \frac{d^\beta f}{dx^\beta}(x) \right| < \infty \right\}.$$

Für eine Funktion $f \in \mathcal{S}$ definieren wir die *Fouriertransformierte* $\mathcal{F}(f)$ von f durch

$$\mathcal{F}(f)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi ixy} dx.$$

Wir verwenden ohne Beweis:

Satz 1 (Poissonsche Summenformel)**.** *Für $f \in \mathcal{S}$ gilt: $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)(n)$.*

Wir wenden Satz (1) auf die Funktionen

$$f_{\tau,z}(x) = e^{\frac{\pi i(\mu+2mx)^2\tau}{2m}} e^{2\pi i(\mu+2mx)z}$$

an und berechnen

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f_{\tau,z})(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{\pi i(\mu+2mx)^2\tau}{2m}} e^{2\pi iz(\mu+2mx)} e^{2\pi ixy} dx \\
&= e^{2\pi i\mu\left(z+\frac{\mu\tau}{4m}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi im\tau\left[x^2+\left(\frac{\mu\tau+2mz+y}{m\tau}\right)x\right]} dx \\
&= e^{2\pi i\mu\left(z+\frac{\mu\tau}{4m}\right)} e^{-\frac{\pi i(\mu\tau+2mz+y)^2}{2m\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \frac{du}{\sqrt{-2\pi im\tau}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{-2im\tau}} e^{-\frac{2\pi imz^2}{\tau}} e^{-\frac{\pi i\left(y^2+2\mu\tau y+4zmy\right)}{2m\tau}}.
\end{aligned}$$

Hierin wurde im dritten Schritt die Substitution $u = \sqrt{-2\pi im\tau}\left(x + \frac{\mu\tau+2mz+y}{2m\tau}\right)$, $du = \sqrt{-2\pi im\tau}\, dx$ vorgenommen. Die letzte Gleichheit folgt aus folgendem bekannten Integral, welches wir ohne Beweis verwenden:

Satz 2. *Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.*

Aus Satz (1) folgt nun

$$\begin{aligned}
\vartheta_{m,\mu}\left(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}\right) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}}(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}\left(f_{-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}}\right)(n) \\
&= \sqrt{\frac{\tau}{2mi}}e^{\frac{2\pi i m z^2}{\tau}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{2\pi i \mu n}{2m}} e^{\frac{2\pi i n^2 \tau}{4m}} e^{2\pi i n z} \\
&= \sqrt{\frac{\tau}{2mi}}e^{\frac{2\pi i m z^2}{\tau}} \sum_{\nu \pmod{2m}} e^{-\frac{\pi i \mu \nu}{m}} \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z} \\ r\equiv\nu \pmod{2m}}} e^{\frac{\pi i r^2 \tau}{2m}} e^{2\pi i r z} \\
&= \sqrt{\frac{\tau}{2mi}}e^{\frac{2\pi i m z^2}{\tau}} \sum_{\nu \pmod{2m}} e^{-\frac{\pi i \mu \nu}{m}} \vartheta_{m,\nu}(\tau, z).
\end{aligned}$$

Zum Vergleich können Sie den Beweis einer ähnlichen, etwas schwächeren Aussage in [1], Kapitel 5, §4.2 finden.

Literatur

[1] E. Freitag, R. Busam, Funktionentheorie 1, Springer 2006, Berlin, 348–349.