DER RING DER JACOBI-FORMEN ([1], S. 38-40 UND S. 89-92)

In diesem Vortrag sollen Sie den Ring $J_{*,*} = \oplus_{k,m} J_{k,m}$ der Jacobi-Formen als Algebra über dem Unterring $M_* = J_{*,0} = \oplus_k J_{k,0} \subset J_{*,*}$ der Modulformen studieren. Betrachten Sie hierzu die Jacobi-Eisenstein-Reihen $E_{4,1} \in J_{4,1}$ und $E_{6,1} \in J_{6,1}$ aus Vortrag 3 und zeigen Sie:

Satz 1. *Die beiden Jacobi-Eisenstein-Reihen $E_{4,1}$ und $E_{6,1}$ sind über dem Ring der Modulformen $J_{*,0}$ algebraisch unabhängig.*

Folgerung 2. Für $k, m \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\dim_{\mathbb{C}} J_{k,m} \geq \sum_{j=0}^{m} \dim_{\mathbb{C}} M_{k-4m-2j}.$$

Andererseits sei $S_k \subseteq M_k$ der Unterraum der Modulformen vom Gewicht k, für die

$$\lim_{\tau \to i\infty} f(\tau) = 0$$

gilt. Dann folgt aus Satz 1 des 5. Vortrages zusammen mit Satz 4 des 1. Vortrages:

Lemma 3. *Für $k, m \in \mathbb{Z}$ gilt:*

$$\dim_{\mathbb{C}} J_{k,m} \leq \begin{cases} \dim_{\mathbb{C}} M_k + \sum_{\nu=1}^{m} \dim_{\mathbb{C}} S_{k+2\nu} & \text{falls } k \text{ gerade ist,} \\ \sum_{\nu=1}^{m-1} \dim_{\mathbb{C}} S_{k+2\nu-1} & \text{falls } k \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Verwenden Sie nun ohne Beweis folgendes grundlegendes Resultat aus der Theorie der Modulformen:

Satz 4. *Sei M_k der $\mathbb{C}$-Vektorraum der Modulformen vom Gewicht k. Dann gilt:*

$$\dim_{\mathbb{C}} M_k = \begin{cases} \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor & \text{falls } k \equiv 2 \pmod{12}, \\ \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Folgern Sie:

Satz 5. *Sei $m \in \mathbb{N}_0$. Der Raum $J_{2*,m} = \oplus_k J_{2k,m}$ ist ein Modul vom Rank $m+1$ über M_*.*

Satz 5 und Satz 1 implizieren nun sofort:

Satz 6. *Jede Jacobi-Form kann eindeutig als Polynom in den beiden Jacobi-Eisenstein-Reihen $E_{4,1}$ und $E_{6,1}$ mit meromorphen Modulformen (Quotienten von Modulformen) als Koeffizienten geschrieben werden.*

Literatur

[1] M. Eichler, D. Zagier, The Theory of Jacobi Forms, Progress in Mathematics **55**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985, 1–148.