DIE RIEMANNSCHE ZETA-FUNKTION ([1], S. 9–11, 16–32)

Die *Riemannsche ζ-Funktion* ist der Ausgangspunkt der Theorie der L-Funktionen. Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\,(s) > 1$ definiert man $\zeta(s)$ durch die Reihe

$$\zeta\,(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Zeigen Sie, dass $\zeta(s)$ für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\,(s) > 1$ auch folgende Darstellung als *Euler-Produkt* hat:

$$\zeta\,(s) = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Sie sollen in Ihrem Vortrag beweisen, dass $\zeta(s)$ eine meromorphe Fortsetzung auf die gesamte komplexe Zahlenebene besitzt. Stellen Sie dazu die ζ-Funktion wie im Folgenden beschrieben durch ein Integral dar. Dazu benötigen wir die *Γ-Funktion.* Diese definieren wir für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\,(s) > 1$ durch

$$\Gamma\,(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt.$$

Die $\Gamma-$Funktion verallgemeinert die Fakultät ($n \in \mathbb{N}$):

$$\Gamma\,(n) = (n-1)!.$$

Verwenden Sie ohne Beweis, dass $\Gamma(s)$ eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$ mit einfachen Polstellen bei $s \in -\mathbb{N}_0$ besitzt. Desweiteren können Sie folgende Identitäten verwenden:

$$\begin{aligned} \Gamma\,(s+1) &= s\Gamma\,(s)\,, \\ \Gamma\,(s)\,\Gamma\,(1-s) &= \frac{\pi}{\sin\,(\pi s)}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie nun, dass

$$\zeta\,(s) = \frac{1}{\Gamma\,(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$$

gilt und benutzen Sie diese Darstellung, um folgenden Satz zu beweisen.

Satz 1. *Die ζ-Funktion besitzt eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$. Diese ist holomorph für $s \neq 1$ und hat bei $s = 1$ eine einfache Polstelle mit Residuum 1.*

Beschreiben Sie schließlich die Werte von $\zeta\,(s)$ mit $\mathrm{Re}\,(s) < 0$. Wir definieren hierzu

$$\Lambda\,(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta\,(s)\,.$$

Leiten Sie folgende Funktionalgleichung her.

Satz 2. *Für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $s \neq 0, 1$ gilt*

$$\Lambda\,(s) = \Lambda\,(1-s)\,.$$

Desweitern hat Λ einfache Polstellen in $s = 0$ und $s = 1$.

Literatur

[1] D. Zagier, Zetafunktionen und quadratische Körper: eine Einführung in die höhere Zahlentheorie, Springer-Verlag, Berlin, 1981, 1–149.