DIRICHLETSCHE L-FUNKTIONEN ([1], S. 11–13, 33–42, 47–51)

Im ersten Vortrag hatten wir die Riemannsche ζ-Funktion untersucht ($s \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\,(s) > 1$):

$$\zeta\,(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{1}$$

In Ihrem Vortrag sollen Sie ähnliche Reihen betrachten, in denen allerdings an Stelle der 1 im Zähler eine komplexe Zahl a_n steht. Wir betrachten dabei nur solche Folgen $(a_n)_n$, denen eine arithmetische Bedeutung zukommt. Darüber hinaus fordern wir von den Reihen $L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$, dass sie eine Darstellung als Euler-Produkt haben, eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$ besitzen und eine Funktionalgleichung erfüllen. Die Funktionen, die wir aus derartigen Reihen erhalten, werden *L-Funktionen* genannt.

Ein *(Dirichlet-)Charakter modulo* $m \in \mathbb{N}$ ist eine Funktion $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, die für beliebige $n, k \in \mathbb{Z}$ folgende Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} \chi\,(n+m) &= \chi\,(n)\,, \\ \chi\,(nk) &= \chi\,(n)\,\chi\,(k)\,, \\ \chi\,(n) = 0 &\Leftrightarrow \mathrm{ggT}\,(n,m) \neq 1. \end{aligned}$$

Sei nun χ ein Charakter. Wir bezeichnen mit $\overline{\chi}$ jenen Charakter, der für jedes $n \in \mathbb{Z}$

$$\overline{\chi}\,(n) = \overline{\chi\,(n)}$$

erfüllt. Wir definieren die *Dirichletsche L-Funktion* eines Dirichlet-Charakters χ für $\mathrm{Re}\,(s) > 1$:

$$L\,(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi\,(n)}{n^s}.$$

Leiten Sie für $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,(s) > 1$ folgende Darstellung als Euler-Produkt her:

$$L\,(s,\chi) = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - \chi\,(p)\,p^{-s}}.$$

Es sei χ_0 der *Hauptcharakter modulo m,* d.h.

$$\chi_0\,(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathrm{ggT}\,(m,n) = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

$$L\,(s,\chi_0) = \zeta\,(s) \prod_{p|m} \left(1 - p^{-s}\right).$$

In Ihrem Vortrag sollen Sie beweisen, dass $L\,(s,\chi)$ eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$ besitzt.

Satz 1. *Es sei $m \in \mathbb{N}$ und χ ein Dirichlet-Charakter modulo m.*

(1) *Für* $\chi = \chi_0$ *hat die Funktion*

$$L(s, \chi_0) - \frac{\prod_{p|m}(1 - p^{-s})}{s - 1}$$

eine holomorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$. *Hierin bezeichnet* $\varphi(m)$ *die Eulersche Funktion, d.h.* $\varphi(m)$ *ist die Anzahl der ganzen Zahlen* $1 \leq n < m$, *die teilerfremd zu* m *sind.*

(2) *Ist* $\chi \neq \chi_0$, *so hat* $L(s, \chi)$ *eine holomorphe Fortsetzung auf ganz* $\mathbb{C}$.

Zeigen Sie dass $\frac{\prod_{p|m}(1-p^{-s})}{s-1}$ an der Stelle $s = 1$ hat Residuum

$$\frac{1}{m}\varphi(m).$$

Hierin bezeichnet $\varphi(m)$ die Eulersche Funktion, d.h. $\varphi(m)$ ist die Anzahl der ganzen Zahlen $1 \leq n < m$, die teilerfremd zu m sind.

Desweiteren erfüllt die L-Funktion $L(s, \chi)$ eine Funktionalgleichung, die jener der ζ-Funktion ähnelt. Sie brauchen diese nicht zu beweisen, sollen aber die Funktionalgleichung und die zugehörige Notation einführen.

Ein Charakter χ modulo m wird *primitiv* genannt, falls es keine Zerlegung der Form

$$\chi = \psi\chi_0$$

gibt, worin ψ ein Charakter modulo d für einen echten Teiler d von m (d.h. $d \mid m$ und $d \neq 1, m$) ist. Wir definieren die *Gaußsche Summe* $\tau(\chi)$ eines Dirichlet-Charakters χ modulo m:

$$\tau(\chi) = \sum_{n \pmod m} \chi(n)\, e^{\frac{2\pi i n}{m}}.$$

Sei nun χ ein primitiver Dirichlet-Charakter modulo $m \in \mathbb{N}$ und $\kappa = \frac{1}{2}(1 - \chi(-1))$. Dann erfüllt die Funktion

$$\Lambda(s, \chi) = \left(\frac{m}{\pi}\right)^{\frac{s+\kappa}{2}} \Gamma\left(\frac{s + \kappa}{2}\right) L(s, \chi)$$

die Funktionalgleichung

$$\Lambda(s, \chi) = \frac{i^{-\kappa}\tau(\chi)}{\sqrt{m}}\Lambda(1 - s, \overline{\chi}).$$

Für den Beweis von Satz 1 betrachten wir die Exponentialsumme

$$F_\chi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\, e^{-nt}.$$

Beweisen Sie, dass der Wert $L(-n, \chi)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ in folgendem Zusammenhang mit F_χ steht.

Satz 2. *Wir betrachten die Laurent-Entwicklung*

$$F_\chi(t) = \sum_{n=-1}^{\infty} b_n t^n,$$

von F_χ *um den Punkt* $t = 0$. *Für* $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt*

$$L(-n, \chi) = (-1)^n\, n! b_n.$$

Verwenden Sie Satz 2 zum Beweis von Satz 1.

Literatur

[1] D. Zagier, Zetafunktionen und quadratische Körper: eine Einführung in die höhere Zahlentheorie, Springer-Verlag, Berlin, 1981, 1–149.