

DIRICHLETSCHER L -FUNKTIONEN ([1], S. 11–13, 33–42, 47–51)

Im ersten Vortrag hatten wir die Riemannsche ζ -Funktion untersucht ($s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > 1$):

$$(1) \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

In Ihrem Vortrag sollen Sie ähnliche Reihen betrachten, in denen allerdings an Stelle der 1 im Zähler eine komplexe Zahl a_n steht. Wir betrachten dabei nur solche Folgen (a_n) , denen eine arithmetische Bedeutung zukommt. Darüber hinaus fordern wir von den Reihen $L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$, dass sie eine Darstellung als Euler-Produkt haben, eine meromorphe Fortsetzung auf ganz \mathbb{C} besitzen und eine Funktionalgleichung erfüllen. Die Funktionen, die wir aus derartigen Reihen erhalten, werden *L-Funktionen* genannt.

Ein (*Dirichlet*-)Charakter modulo $m \in \mathbb{N}$ ist eine Funktion $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, die für beliebige $n, k \in \mathbb{Z}$ folgende Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} \chi(n+m) &= \chi(n), \\ \chi(nk) &= \chi(n)\chi(k), \\ \chi(n) = 0 &\Leftrightarrow \operatorname{ggT}(n, m) \neq 1. \end{aligned}$$

Sei nun χ ein Charakter. Wir bezeichnen mit $\bar{\chi}$ jenen Charakter, der für jedes $n \in \mathbb{Z}$

$$\bar{\chi}(n) = \overline{\chi(n)}$$

erfüllt. Wir definieren die *Dirichletsche L-Funktion* eines Dirichlet-Charakters χ für $\operatorname{Re}(s) > 1$:

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Leiten Sie für $s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > 1$ folgende Darstellung als Euler-Produkt her:

$$L(s, \chi) = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}}.$$

Es sei χ_0 der *Hauptcharakter modulo m* , d.h.

$$\chi_0(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \operatorname{ggT}(m, n) = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

$$L(s, \chi_0) = \zeta(s) \prod_{p|m} (1 - p^{-s}).$$

In Ihrem Vortrag sollen Sie beweisen, dass $L(s, \chi)$ eine meromorphe Fortsetzung auf ganz \mathbb{C} besitzt.

Satz 1. *Es sei $m \in \mathbb{N}$ und χ ein Dirichlet-Charakter modulo m .*

(1) Für $\chi = \chi_0$ hat die Funktion

$$L(s, \chi_0) - \frac{\prod_{p|m} (1 - p^{-s})}{s-1} = L(s, \chi_0) - \frac{\frac{1}{m}\varphi(m)}{s-1}$$

eine holomorphe Fortsetzung auf ganz \mathbb{C} . Hierin bezeichnet $\varphi(m)$ die eulersche Funktion, d.h. $\varphi(m)$ ist die Anzahl der ganzen Zahlen $1 \leq n < m$, die teilerfremd zu m sind.

(2) Ist $\chi \neq \chi_0$, so hat $L(s, \chi)$ eine holomorphe Fortsetzung auf ganz \mathbb{C} .

Desweiteren erfüllt die L -Funktion $L(s, \chi)$ eine Funktionalgleichung, die jener der ζ -Funktion ähnelt. Sie brauchen dies nicht zu beweisen, sollen aber die Funktionalgleichung und die zugehörige Notation einführen.

Ein Charakter χ modulo m wird *primitiv* genannt, falls es keine Zerlegung der Form

$$\chi = \psi\chi_0$$

gibt, worin ψ ein Charakter modulo d für einen echten Teiler d von m (d.h. $d | m$ und $d \neq 1, m$) ist. Wir definieren die *Gaußsche Summe* $\tau(\chi)$ eines Dirichlet-Charakters χ modulo m :

$$\tau(\chi) = \sum_{n \pmod{m}} \chi(n) e^{\frac{2\pi i n}{m}}.$$

Sei nun χ ein primitiver Dirichlet-Charakter modulo $m \in \mathbb{N}$ und $\kappa = \frac{1}{2}(1 - \chi(-1))$. Dann erfüllt die Funktion

$$\Lambda(s, \chi) = \left(\frac{m}{\pi}\right)^{\frac{s+\kappa}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\kappa}{2}\right) L(s, \chi)$$

die Funktionalgleichung

$$\Lambda(s, \chi) = \frac{i^{-\kappa} \tau(\chi)}{\sqrt{m}} \Lambda(1-s, \bar{\chi}).$$

Für den Beweis von Satz 1 betrachten wir die Exponentialsumme

$$F_\chi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-nt}.$$

Beweisen Sie, dass der Wert $L(-n, \chi)$ ($n \in \mathbb{N}_0$) in folgendem Zusammenhang mit F_χ steht.

Satz 2. *Wir betrachten die Laurent-Entwicklung*

$$F_\chi(t) = \sum_{n=-1}^{\infty} b_n t^n,$$

von F_χ um den Punkt $t = 0$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$L(-n, \chi) = (-1)^n n! b_n.$$

Verwenden Sie Satz 2 zum Beweis von Satz 1.

LITERATUR

- [1] D. Zagier, Zetafunktionen und quadratische Körper: eine Einführung in die höhere Zahlentheorie, Springer-Verlag, Berlin, 1981, 1–149.