PRIMZAHLEN IN ARITHMETISCHEN PROGRESSIONEN ([1], S. 249–261)

Das Ziel Ihres Vortrags ist die folgende Anwendung der Theorie der Dirichletschen L-Funktionen. Es seien $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Wir definieren:

$$\mathscr{P}(a;m) = \left\{ p \text{ prim} \;\middle|\; p \equiv a \pmod{m} \right\}.$$

Beweisen Sie folgenden Satz.

Satz 1. *Es seien $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Dann gilt*

$$\lim_{s \to 1} \frac{\sum_{p \in \mathscr{P}(a;m)} p^{-s}}{\ln\left((s-1)^{-1}\right)} = \frac{1}{\varphi(m)}.$$

Hierin bezeichnet $\varphi(m)$ die eulersche φ-Funktion, d.h. $\varphi(m)$ ist die Anzahl der ganzen Zahlen $1 \leq n < m$, die zu m teilerfremd sind. Insbesondere ist $\mathscr{P}(a;m)$ unendlich.

In dem Beweis von Satz 1 treten Reihen der Form

$$\mathcal{G}(s,\chi) = \sum_{p \text{ prim}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi\left(p^k\right) p^{-ks}$$

auf, worin χ ein Dirichlet-Charakter modulo m ist. Diese Reihen sind durch

$$\exp\left(\mathcal{G}(s,\chi)\right) = L(s,\chi)$$

mit den Dirichletschen L-Funktionen $L(s,\chi)$ verbunden. Führen Sie Satz 1 auf folgenden Satz zurück.

Satz 2. Es sei χ ein Charakter modulo $m \in \mathbb{N}$. Falls $\chi = \chi_0$ der triviale Charakter modulo m ist, gilt

$$\lim_{s \to 1} \frac{\mathcal{G}(s,\chi_0)}{\ln\left((s-1)^{-1}\right)} = 1.$$

Ist $\chi \neq \chi_0$, so ist $\mathcal{G}(s,\chi)$ für $s \to 1$ beschränkt.

Um den zweiten Teil von Satz 2 zu beweisen, ist es wichtig zu zeigen, dass (für $\chi \neq \chi_0$) $L(1,\chi) \neq 0$ gilt. Dies sollte im Mittelpunkt Ihres Vortrages stehen.

Literatur

[1] K. Ireland, M. Rosen, A classical introduction to modern number theory, Springer-Verlag, Berlin, 1991, 1–389.