MODULFORMEN UND L-FUNKTIONEN ([1], S. 136–137, [2], S. 109–111, 149–162)

In Ihrem Vortrag sollen Sie Modulformen und ihre Dirichlet-Reihen behandeln.

Führen Sie zunächst Modulformen von ganzzahligem Gewicht k ein. Definieren Sie dazu die obere Halbebene $\mathbb{H}$, die Operation von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1 \right\}$ auf $\mathbb{H}$ durch Möbiustransformationen und den Strichoperator $|_k$. Erklären Sie, warum für M_1, $M_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ gilt:

$$f|_k M_1|_k M_2 = f|_k M_1 M_2.$$

Zeigen Sie als nächstes, warum es außer der Nullfunktion keine Modulformen von ungeradem Gewicht gibt.

Definieren Sie dann meromorphe Modulformen, erinnern Sie dabei auch an die Definition von Laurent- und Fourier-Reihen. Erläutern Sie die Bedingungen für holomorphe Modulformen und Spitzenformen. Zeigen Sie, dass es keine holomorphen Modulformen von negativem Gewicht gibt.

Eine holomorphe Modulform f besitzt eine Fourier-Reihe

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n)\, e^{2\pi i n \tau},$$

mit $c(n) \in \mathbb{C}$ und $\tau \in \mathbb{H}$. Wir betrachten nun die Dirichlet-Reihe

$$D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)}{n^s}.$$

Um die Konvergenz von $D_f(s)$ zu untersuchen, sollten Sie zunächst die Fourier-Koeffizienten $c(n)$ abschätzen. Zeigen Sie hierzu:

Satz 1. *Es sei f eine holomorphe Modulform vom Gewicht k mit zugehöriger Fourier-Reihe*

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n)\, e^{2\pi i n \tau}.$$

Dann gilt für $n \to \infty$

$$c(n) = O\left(n^{k-1}\right).$$

Falls f eine Spitzenform ist, gilt für $n \to \infty$

$$c(n) = O\left(n^{\frac{k}{2}}\right).$$

Folgern Sie nun aus Satz 1, dass $D_f(s)$ für $s \in \mathbb{C}$ konvergiert, falls $\mathrm{Re}(s)$ „genügend groß“ ist:

Korollar 2. Es sei f eine Modulform vom Gewicht k. Dann konvergiert $D_f(s)$ für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > k$. Falls f eine Spitzenform ist, so konvergiert $D_f(s)$ für $\mathrm{Re}(s) > \frac{k}{2} + 1$.

Literatur

[1] T. Apostol, Modular functions and Dirichlet series in number theory, Springer-Verlag, Berlin, 1976, 1–204.

[2] M. Koecher und A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer-Verlag, Berlin, 1998, 1–331.