FUNKTIONALGLEICHUNGEN VON MODULAREN L-FUNKTIONEN ([1], S. 136–138)

Im vorangegangenen Vortrag haben wir die Fourier-Reihe $(c(n) \in \mathbb{C}, \tau \in \mathbb{H})$

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n) e^{2\pi i n\tau}$$

einer (holomorphen) Modulform f benutzt, um die Dirichlet-Reihe

$$D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)}{n^s}$$

zu definieren. Wir hatten gezeigt, dass $D_f(s)$ für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > k$ konvergiert. In Ihrem Vortrag sollen Sie nun zeigen, dass $D_f(s)$ auf ganz $\mathbb{C}$ meromorph fortgesetzt werden kann und eine Funktionalgleichung erfüllt. Nehmen Sie hierzu an, dass f eine holomorphe Modulform vom Gewicht $k \geq 4$ ist. Wir definieren

$$\Lambda_f(s) = (2\pi)^{-s} \Gamma(s) D_f(s).$$

Satz 1. *Es sei f eine holomorphe Modulform vom Gewicht $k \geq 4$. Die Dirichlet-Reihe $D_f(s)$ besitzt eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$, die für $s \neq k$ holomorph ist. Falls $c(0) = 0$ gilt, so ist $D_f(s)$ auch bei $s = k$ holomorph. Falls $c(0) \neq 0$ gilt, so hat $D_f(s)$ bei $s = k$ eine einfache Polstelle mit Residuum*

$$\frac{(-1)^{\frac{k}{2}} (2\pi)^k}{\Gamma(k)} c(0).$$

Die Funktion $\Lambda_f(s)$ erfüllt die Funktionalgleichung

$$\Lambda_f(s) = (-1)^{\frac{k}{2}} \Lambda_f(k-s).$$

Zeigen Sie schließlich, dass $D_f(s)$ (unter gewissen Bedingungen an die Fourier-Koeffizienten) ein *Euler-Produkt* hat.

Satz 2. *Es sei $f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n) e^{2\pi i n\tau}$ mit $f \neq 0$. Wir nehmen an, dass die Koeffizienten $c(n)$ in folgender Weise multiplikativ sind:*

$$c(n) c(m) = \sum_{d \mid ggT(n,m)} d^{2k-1} c\left(\frac{mn}{d^2}\right).$$

Dann gilt für $s \in \mathbb{C}$, $Re(s) > k$:

$$D_f(s) = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - c(p) p^{-s} + p^{2k-1} p^{-2s}}.$$

Modulformen, deren Fourier-Reihen die Bedingungen von Satz 2 erfüllen, existieren tatsächlich. Dies zu beweisen würde aber den Rahmen Ihres Vortrages sprengen.

Literatur

[1] T. Apostol, Modular functions and Dirichlet series in number theory, Springer-Verlag, Berlin, 1976, 1–204.