DIE THETA-FUNKTION UND DIE FUNKTIONALGLEICHUNG DER RIEMANNSCHEN ζ-FUNKTION ([1], S. 9–11, S. 30–33, [2], S. 150–151)

Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 1$ definiert man die *Riemannsche ζ-Funktion* $\zeta(s)$ durch die Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Im ersten Vortrag hatten wir die Riemannsche ζ-Funktion eingeführt. Wir hatten gesehen, dass diese eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$ besitzt. Darüber hinaus erfüllt die Funktion

$$\Lambda(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

für $s \in \mathbb{C}$ die Funktionalgleichung

$$\Lambda(s) = \Lambda(1-s). \tag{1}$$

Für die Herleitung der Funktionalgleichung hatten wir die Integral-Darstellung der Γ-Funktion benutzt.

In den letzten beiden Vorträgen hatten wir Modulformen $f(\tau)$ und ihre Dirichlet-Reihen $D_f(s)$ betrachtet. Sie sollen unter Vewendung der Transformationseigenschaft einer gewissen Modulform einen zweiten Beweis von (1) geben. Wir verwenden dabei die *Jacobische Theta-Funktion* ($\tau \in \mathbb{H}$):

$$\theta(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau}.$$

Zeigen Sie zunächst, dass θ die Transformationseigenschaft

$$\theta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}}\,\theta(\tau) \tag{2}$$

besitzt. Leiten Sie anschließend die Integral-Darstellung

$$\Lambda(s) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\theta(it) - 1\right) t^{\frac{s}{2}-1} dt$$

für Λ her. Spalten Sie nun dieses Integral gemäß $0 \le t \le 1$ und $t > 1$ auf und verwenden Sie im dem ersten Integral die Transformationseigenschaft (2), um den Beweis von (1) abzuschließen.

Literatur

[1] R. Bellman, A brief introduction to theta functions, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1–78.
[2] M. Koecher und A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer-Verlag, Berlin, 1998, 1–331.