DIRICHLETS KLASSENZAHLFORMEL ([1], **S. 36–38, 42–44, 65–75)**

Es sei D eine Fundamentaldiskriminante. Falls $D > 0$ (bzw. $D < 0$) ist, nennen wir die Anzahl der Äquivalenzklassen primitiver (bzw. primitiver positiv definiter) binärer quadratischer Formen die *Klassenzahl* $h(D)$ von D. In Ihrem Vortrag sollen Sie $h(D)$ durch $L(1, \chi_D)$ ausdrücken. Hierin ist der *Kronecker-Jacobi-Charakter* χ_D wie folgt definiert:

(1) Für $p \neq 2$ prim sei

$$\chi_D(p) = \begin{cases} 0 & \text{falls } p \mid D, \\ 1 & \text{falls } p \nmid D \text{ und es ein } r \in \mathbb{Z} \text{ mit } r^2 \equiv D \pmod{p} \text{ gibt}, \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(2) Für $p = 2$ sei

$$\chi_D(2) = \begin{cases} 0 & \text{falls } D \equiv 0 \pmod{4}, \\ 1 & \text{falls } D \equiv 1 \pmod{8}, \\ -1 & \text{falls } D \equiv 5 \pmod{8}. \end{cases}$$

(3) Wenn $n = \prod_{j=1}^{k} p_j^{r_j}$ die Primfaktorzerlegung von $n \in \mathbb{N}$ ist, dann sei

$$\chi_D(n) = \prod_{j=1}^{k} \chi_D(p_j)^{r_j}.$$

Falls $D < 0$ ist, so schreiben wir $w = \#\{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid f_M = f\} < \infty$, wobei f_M im vorigen Vortrag definiert wurde. Falls $D > 0$ ist, so nennen wir jene Lösung (t_0, u_0) der Pellschen Gleichung

$$t_0^2 - Du_0^2 = 4,$$

für die $t_0 > 0$ minimal ist, die *fundamentale Lösung*. Diese Lösung gibt die *Fundamentaleinheit*

$$\varepsilon_0 = \frac{t_0 + u_0\sqrt{D}}{2}$$

des reell-quadratischen Körpers $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$.

Die Klassenzahl ist nun wie folgt mit $L(1, \chi_D)$ verbunden.

Satz 1 (Klassenzahlformel)**.** *Für eine Fundamentaldiskriminante D gilt*

$$h(D) = \begin{cases} \frac{w\sqrt{|D|}}{2\pi} L(1, \chi_D) & \textit{falls } D < 0, \\ \frac{\sqrt{D}}{\log(\varepsilon_0)} L(1, \chi_D) & \textit{falls } D > 0. \end{cases}$$

Das Ziel Ihres Vortrages ist der Beweis des folgenden Satzes, der einen wichtigen Schritt im Beweis von Satz 1 darstellt. Beachten Sie, dass wir $R(n)$ im vorangegangenen Vortrag definiert hatten.

Satz 2. *Es sei D eine Fundamentaldiskriminante. Dann gilt*

$$L(1, \chi_D) = \lim_{N \to \infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} R(n) \right). \tag{1}$$

Leiten Sie nun folgenden Zusammenhang zwischen $R(n)$ und χ_D her.

Satz 3. *Es sei D eine Fundamentaldiskriminante und $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Dann gilt*

$$R(n) = \sum_{m|n} \chi_D(m).$$

Hierin läuft die Summe über die positiven Teiler von n.

Benutzen Sie schließlich folgenden Satz ohne Beweis, um den Beweis von Satz 1 abzuschließen.

Satz 4. *Es sei D eine Fundamentaldiskriminante und f eine primitive binäre quadratische Form mit Diskriminante D. Weiter sei f positiv definit, falls $D < 0$ ist. Dann gilt*

$$\lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} R(n, f) \right) = \begin{cases} \frac{2\pi}{w\sqrt{|D|}} & \textit{falls } D < 0, \\ \frac{\log(\varepsilon_0)}{\sqrt{D}} & \textit{falls } D > 0. \end{cases}$$

Literatur

[1] D. Zagier, Zetafunktionen und quadratische Körper: eine Einführung in die höhere Zahlentheorie, Springer-Verlag, Berlin, 1981, 1–149.