ASYMPTOTISCHE ENTWICKLUNGEN UND ζ-WERTE ([1], S. 25, 47–50, [2], S. 305–308, 315–323)

Für $t \to 0^+$ benutzen wir die Notation

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n t^n,$$

falls für jedes $N > 0$

$$f(t) - \sum_{n<N} b_n t^n = O\left(t^N\right)$$

gilt. Sei nun $\varepsilon > 0$ und f eine unendlich oft differenzierbare Funktion mit $f(t) = O\left(t^{-1-\varepsilon}\right)$ für $t \to \infty$. Dann konvergiert die Summe

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f(nt)$$

für $t > 0$. Ziel Ihres Vortrages ist es, das Wachstum von $g(t)$ für $t \to 0^+$ zu bestimmen. Wir schreiben

$$I_f = \int_0^{\infty} f(t)\, dt.$$

Satz 1. *Falls*

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

gilt, so folgt

$$g(t) \sim \frac{I_f}{t} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta(-n)\, t^n.$$

Wir rufen nun Satz 2 des 2. Vortrages in Erinnerung. Sie können diesen Satz ohne Beweis verwenden. Wir definieren für einen Charakter χ modulo $m \in \mathbb{N}$:

$$F_\chi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\, e^{-nt}.$$

Satz 2. *Wir betrachten die Laurent-Entwicklung*

$$F_\chi(t) = \sum_{n=-1}^{\infty} b_n t^n,$$

von F_χ um den Punkt $t = 0$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$L(-n, \chi) = (-1)^n\, n! b_n.$$

Benutzen Sie nun Satz 2 für $m = 1$, um $\zeta(-n)$ zu berechnen. In diesem Fall ist $\chi = \chi_0$ der Hauptcharakter und

$$F_{\chi_0}(t) = \frac{1}{e^t - 1}.$$

Die *Bernoulli-Zahlen* B_n $(n \in \mathbb{N})$ sind wie folgt definiert:

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n, \qquad |t| < 2\pi.$$

Wir erhalten also

$$F_{\chi_0}(t) \sim \frac{1}{t} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} t^n$$

und mit Satz 1

$$g(t) \sim \frac{I_f}{t} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B_{n+1}}{n+1} b_n t^n.$$

Literatur

[1] D. Zagier, Zetafunktionen und quadratische Körper: eine Einführung in die höhere Zahlentheorie, Springer-Verlag, Berlin, 1981, 1–149.

[2] E. Zeidler, Quantum field theory I: basics in mathematics and physics. A bridge between mathematicians and physicists, Springer, Berlin, 2006. Appendix by D. Zagier, 305–323.