EINE MODULFORM ZU EINER ELLIPTISCHEN KURVE ([1], S. 141-146)

Ziel Ihres Vortrages ist es, den Beweis des Modularitätssatzes für die Heron-Zahlen-Kurven E_r, der im vorangegangenen Vortrag begonnen wurde, fortzusetzen. Erinnern Sie zunächst an die Weierstraß-Gleichung ($r \in \mathbb{N}$)

$$y^2 = x^3 - r^2 x$$

der Kurven E_r. Wie wir im letzten Vortrag gesehen haben reicht es die Kurve E_1 zu betrachten und wir haben bereits die Zahlen $\lambda_1(p)$ bestimmt. In Ihrem Vortrag werden Sie nun die Modulform konstruieren, die zu der Kurve E_1 korrespondiert, indem Sie dem auf S. 141-146 in [1] beschriebenen Vorgehen folgen. Wiederholen Sie dazu die Definition des Ideals

$$\mathfrak{a} = \left((1+i)^3\right) \mathbb{Z}[i].$$

Wir nennen eine Zahl $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ *ungerade*, falls $\mathrm{ggT}(\alpha, \mathfrak{a}) = 1$ gilt, ansonsten heißt α *gerade*. Eine ungerade Zahl $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ heißt *primär*, falls die Kongruenz $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}}$ gilt. Für ungerades $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ bezeichnen wir mit $\rho(\alpha)$ diejenige Einheit, für die $\rho(\alpha)\alpha$ primär ist. Für gerades α setzen wir $\rho(\alpha) = 0$. Zeigen Sie, dass diese Definition ρ zu einem wohldefinierten Charakter modulo $\mathfrak{a}$ macht. Sei nun

$$\chi(\alpha) = \rho(\alpha)\alpha.$$

Erläutern Sie, warum χ als ein Character auf den Idealen von $\mathbb{Z}[i]$ betrachtet werden kann. Nun können wir die *Hecke L-Funktion* zu χ durch das Euler-Produkt

$$L(s, \chi) = \prod_{\mathfrak{p}} (1 - \chi(\mathfrak{p}) N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$$

definieren, wobei das Produkt über die Primideale $\mathfrak{p}$ von $\mathbb{Z}[i]$ läuft und $N(\mathfrak{p})$ die *Norm* des Ideals $\mathfrak{p}$ bezeichnet, also die Ordnung des Faktorrings $\mathbb{Z}[i]/\mathfrak{p}$. Beweisen Sie nun durch Vergleich der Faktoren in den jeweiligen Euler-Produkten das folgende Resultat.

Proposition 1. *Für Re$(s) > \frac{3}{2}$ gilt die Gleichheit*

$$L_{E_1}(s) = L(s, \chi),$$

wobei L_{E_1} die Hasse-Weil L-Funktion der elliptischen Kurve E_1 bezeichnet. Insbesondere gilt

$$\lambda(n) = \sum_{N(\mathfrak{r})=n} \chi(\mathfrak{r}) = \frac{1}{4} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}[i] \\ |\alpha|^2 = n}} \rho(\alpha)\alpha.$$

Die Summation über $\mathfrak{r}$ läuft dabei über die Ideale von $\mathbb{Z}[i]$ mit Norm n.

Wir verwenden nun diese Proposition zur Definition der Fourier-Reihe ($q = e^{2\pi i \tau}$, $\tau \in \mathbb{H}$)

$$f(\tau) = \frac{1}{4} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}[i]} \rho(\alpha)\alpha q^{|\alpha|^2}.$$

Dies ist im Wesentlichen eine sogenannte *Thetareihe*, deren modulare Transformationseigenschaften wir im Folgenden bestimmen werden. Präsentieren Sie hierzu die Variante der *Poissonschen Summenformel* (nach Siméon Denis Poisson, 1781-1840), die auf S. 142 f in [1] eingeführt wird, und folgen Sie dann dem Rest des Kapitels um unseren letzten Satz zu beweisen.

Theorem 2. *Die Funktion f ist eine Spitzenform vom Gewicht 2 bezüglich $\Gamma_0(32)$.*

Literatur

[1] H. Iwaniec, *Topics in Classical Automorphic Forms*, Graduate Studies in Mathematics **17**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.