

§2 Dirichletsche Reihen: formale Eigenschaften

Nachdem wir die Konvergenz von Dirichletschen Reihen besprochen haben, wollen wir erläutern, wie man mit solchen Reihen umgeht - die Regeln für die Handhabung Dirichletscher Reihen sind nämlich anders als bei Potenzreihen.

Es ist klar, daß die Summe von zwei Dirichletschen Reihen die Reihe ist, deren allgemeiner Koeffizient die Summe der Koeffizienten der einzelnen Reihen ist. Wie bildet man das Produkt? Seien

$$(1) \quad f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, \quad g(s) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m m^{-s}$$

zwei in einer offenen Menge U durch absolut konvergente Dirichletsche Reihen gegebene Funktionen; dann ist in U

$$\begin{aligned} f(s) g(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n b_m n^{-s} m^{-s} \\ (2) \quad &= \sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m (nm)^{-s} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k k^{-s}, \end{aligned}$$

wobei

$$(3) \quad c_k = \sum_{\substack{n,m \geq 1 \\ nm=k}} a_n b_m = \sum_{n|k} a_n b_{k/n}$$

die *Faltung* der Koeffizienten $\{a_n\}$ und $\{b_m\}$ genannt wird. (Das Symbol $\sum_{n|k}$ bezeichnet eine Summe über alle positiven Teiler n von k .) Das heißt, die additive Faltung $c_k = \sum_{n+m=k} a_n b_m$, die die Multiplikation von Potenzreihen beschreibt, wird in der Theorie der Dirichletschen Reihen durch die multiplikative Faltung (3) ersetzt; es ist diese Tatsache, die für die große Bedeutung der Dirichletschen Reihen in der Zahlentheorie verantwortlich ist.

Wir werden nichts weiteres über die Konvergenz von $\sum c_k k^{-s}$ beweisen; man kann z.B. ohne viel Mühe zeigen, daß diese Reihe mindestens dann konvergiert, wenn beide Reihen (1) konvergieren und eine davon absolut konvergent ist.

Bispiele: a) Sei $d(n)$ die Anzahl der positiven Teiler von n . Dann ist für $\sigma > 1$

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} = \zeta(s)^2,$$

da $d(n) = \sum_{d|n} 1 \times 1$ ist.

b) Sei $\tau(n)$ die Summe der positiven Teiler von n , oder allgemeiner

$$(5) \quad \sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$$

die Summe der k -ten Potenzen der positiven Teiler. Dann ist

$$(6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n)}{n^s} = \zeta(s) \zeta(s-k) \quad (\sigma > k+1).$$

In beiden Beispielen haben die Koeffizienten die spezielle Eigenschaft, multiplikativ zu sein. Eine *multiplikative* Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine nicht identisch verschwindende Funktion, die

$$(7) \quad f(mn) = f(m)f(n)$$

für alle m, n mit $(m, n) = 1$ erfüllt (eine Funktion, die (7) für alle m, n erfüllt, heißt *streng multiplikativ*). Diese Eigenschaft wirkt sich auf die entsprechenden Dirichletschen Reihen wie folgt aus: ist f multiplikativ, so ist $f(1) = 1$ (da aus (7) $f(1)^2 = f(1)$ folgt, und $f(1) = 0$ das identische Verschwinden von f implizieren würde) und

$$f(n) = f(p_1^{r_1}) \dots f(p_k^{r_k})$$

für eine Zahl n mit der Primzahlzerlegung $n = p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$.

Es ist also in dem Bereich der absoluten Konvergenz von $\sum f(n)n^{-s}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s} = \sum_{r_2, r_3, r_5, \dots} f(2^{r_2} 3^{r_3} 5^{r_5} \dots) (2^{r_2} 3^{r_3} 5^{r_5} \dots)^{-s}$$

(wo die Summe über alle Zuordnungen $p \mapsto r_p$ läuft mit $r_p \geq 0$ und $r_p = 0$ für alle bis auf endlich viele Primzahlen p)

$$\begin{aligned} &= \sum_{r_2, r_3, r_5, \dots \geq 0} \frac{f(2^{r_2})}{2^{r_2 s}} \frac{f(3^{r_3})}{3^{r_3 s}} \frac{f(5^{r_5})}{5^{r_5 s}} \dots \\ &= \prod_p \left[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^{rs}} \right], \end{aligned}$$

wo das Produkt über alle Primzahlen p läuft. Wir haben also den

SATZ 1: Sei $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ eine multiplikative Funktion, und sei die Reihe

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

absolut konvergent. Dann ist $F(s)$ gleich dem Euler-Produkt

$$(8) \quad F(s) = \prod_p \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right),$$

wo das Produkt über alle Primzahlen p läuft und auch absolut konvergiert.

Beispiele: c) Für $\zeta(s)$ sind die Koeffizienten alle gleich 1, also

$$(9) \quad \zeta(s) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots \right) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \quad (\sigma > 1).$$

Diese von Euler entdeckte Produktentwicklung ist der Grund für die große Rolle, die die Zetafunktion in der Primzahltheorie spielt. Außerdem lehrt sie, daß für $\sigma > 1$ die Funktion $\zeta(s)$ nie verschwinden kann (da das Produkt konvergent ist und seine einzelnen Glieder nicht Null sind). Für die in a) und b) angegebenen Reihen erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} &= \zeta(s)^2 = \prod_p (1 - p^{-s})^{-2} \\ &= \prod_p (1 + 2p^{-s} + 3p^{-2s} + \dots) \\ &= \prod_p \left(1 + \frac{d(p)}{p^s} + \frac{d(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n)}{n^s} &= \zeta(s) \zeta(s-k) = \prod_p [(1 - p^{-s})(1 - p^{k-s})]^{-1} \\ &= \prod_p \left(1 + \frac{p^{k+1}}{p^s} + \frac{p^{2k+p^{k+1}}}{p^{2s}} + \dots \right) \\ &= \prod_p \left(1 + \frac{\sigma_k(p)}{p^s} + \frac{\sigma_k(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right), \end{aligned}$$

also sind die beiden Funktionen $n \mapsto d(n)$ und $n \mapsto \sigma_k(n)$ multiplikativ (was man auch direkt leicht sieht), da trivialerweise die Umkehrung von Satz 1 gilt: besitzt eine Dirichletsche Reihe ein Euler-Produkt (8), so stellen die Koeffizienten dieser Reihe eine multiplikative Funktion dar.

d) Für den Kehrwert $\frac{1}{\zeta(s)}$ erhalten wir

$\prod_{i=1}^N \zeta(a_i s + b_i)^{c_i}$ für geeignete ganze Zahlen $a_i, b_i, c_i, a_i > 0$.

Man zeige, daß dann auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) f(n) n^{-s}$ so ausgedrückt werden kann und schreibe die entsprechenden Identitäten für die Dirichletschen Reihen der Aufgaben 4 und 5 explizit hin.

7. Sei $g(n)$ die Anzahl der nichtisomorphen abelschen Gruppen der Ordnung n . Man benutze den Struktursatz für endliche abelsche Gruppen um zu zeigen, daß $g(n)$ die multiplikative Funktion ist, deren Wert für eine Primzahlpotenz p^r gleich der Anzahl der Partitionen von r ist (also der Zerlegungen $r = r_1 + r_2 + \dots$ mit $r_1 \geq r_2 \geq \dots > 0$). Man schließe hieraus, daß die Dirichletsche Reihe

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$$

für $\sigma > 1$ gleich dem (konvergenten) Produkt

$$\zeta(s) \zeta(2s) \zeta(3s) \dots$$

ist; insbesondere ist $G(s)$ holomorph für $\sigma > 1$ und hat einen Pol bei $s = 1$ mit Residuum

$$C = \zeta(2) \zeta(3) \zeta(4) \dots = 2,29485 \dots$$

Es kann gezeigt werden, daß

$$\sum_{n=1}^N g(n) = CN + O(\sqrt{N}) ;$$

d.h. der Mittelwert von $g(n)$ ist gleich C , also endlich!

§3 Die Gammafunktion

Die Gammafunktion ist eine der wichtigsten mathematischen Funktionen und sicherlich die einfachste von den nichtelementaren Funktionen. Sie spielt eine ganz wesentliche Rolle bei der Untersuchung von Dirichletschen Reihen.

Man sucht eine Interpolationsfunktion für die Funktion $n \mapsto n!$, d.h. eine stetige Funktion $\Pi(x)$, so daß $\Pi(n) = n!$ für alle natürlichen Zahlen n ist. Einem vielleicht unglücklichen, von Legendre

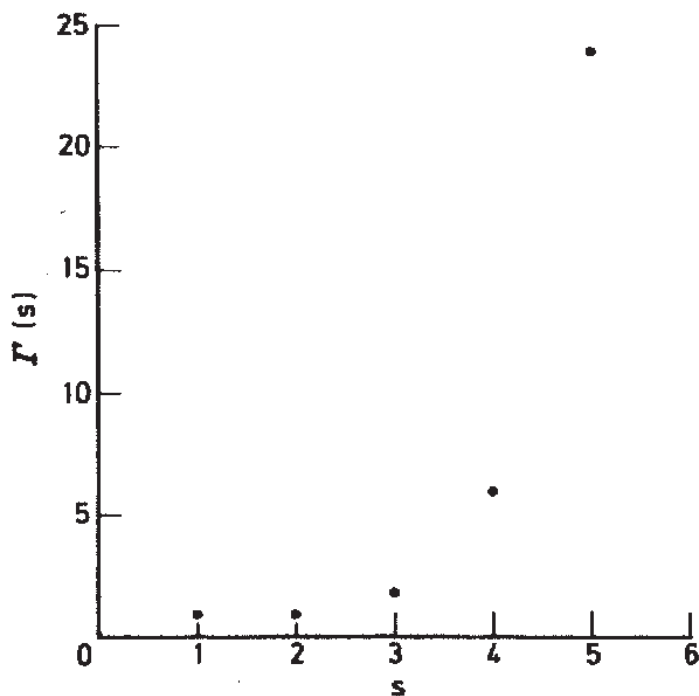
eingeführten Brauch folgend, machen wir die Substitution $x = s - 1$ und schreiben $\Gamma(s)$ für $\Pi(x) = \Pi(s-1)$. Wir suchen also eine stetige Funktion $\Gamma(s)$, die

$$(1) \quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad (n = 1, 2, \dots)$$

erfüllt und außerdem die Grundeigenschaft $n! = n \cdot (n-1)!$ der Fakultät noch besitzt:

$$(2) \quad \Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad \text{für alle } s \neq 0.$$

Wie findet man eine solche Funktion? Für s klein muß $\Gamma(s)$ durch folgende Punkte hindurchgehen:



und es ist nicht klar, wie man interpolieren soll; für n groß ist die Funktion $n \mapsto n!$ wegen des schnellen Wachstums viel gleichmäßiger, und es sollte leichter sein, sie zu interpolieren. Durch wiederholte Anwendung von (2) erhalten wir

$$(3) \quad \Gamma(s+N) = s(s+1) \dots (s+N-1)\Gamma(s);$$

es reicht also, eine asymptotische Formel für $\Gamma(s+N)$ ($N \rightarrow \infty$) anzugeben. Für $s \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}\Gamma(s+N) &= (N+s-1)! = (N+s-1)(N+s-2)\dots(N+1)\cdot N\cdot(N-1)! \\ &= N^s \left(1 + \frac{s-1}{N}\right) \left(1 + \frac{s-2}{N}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{N}\right) \cdot (N-1)!,\end{aligned}$$

also $\Gamma(s+N) \sim N^s (N-1)!$ für $N \rightarrow \infty$. Es ist daher naheliegend, $\Gamma(s)$ für alle s durch

$$(4) \quad \Gamma(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^s (N-1)!}{s(s+1)\dots(s+N-1)} \quad (s \in \mathbb{C})$$

zu definieren, falls der Grenzwert existiert. Das ist auch der Fall, falls $s \notin -\mathbb{N}$: sei

$$(5) \quad \Gamma_N(s) = \frac{N^s (N-1)!}{s(s+1)\dots(s+N-1)} \quad (N \in \mathbb{N});$$

dann ist

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma_{N+1}(s)}{\Gamma_N(s)} &= \left(\frac{N+1}{N}\right)^s \frac{N}{s+N} = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^s \left(1 + \frac{s}{N}\right)^{-1} \\ &= \left(1 + \frac{s}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right) \left(1 - \frac{s}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right) = \left(1 + O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right),\end{aligned}$$

und das beweist, daß das Produkt $\prod_{N>1} \frac{\Gamma_{N+1}(s)}{\Gamma_N(s)}$ konvergiert, d.h.

daß $\lim_{N \rightarrow \infty} \Gamma_N(s)$ existiert. Wir erhalten auch

$$\Gamma_N(s) = \Gamma_1(s) \prod_{n=1}^{N-1} \frac{\Gamma_{n+1}(s)}{\Gamma_n(s)} = \frac{1}{s} \prod_{n=1}^{N-1} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-1} \right]$$

und somit

$$(6) \quad \Gamma(s+1) = s\Gamma(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s}{\left(1 + \frac{s}{n}\right)},$$

eine von Euler stammende Produktformel für die Γ -Funktion.

Die Eigenschaft (2) der durch (4) definierten Funktion ist klar, da

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{N^{s+1} (N-1)!}{(s+1)(s+2)\dots(s+N)} \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[s \cdot \frac{N}{N+s} \cdot \frac{N^s (N-1)!}{s(s+1)\dots(s+N-1)} \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[s \cdot \frac{N}{N+s} \cdot \Gamma_N(s) \right] = s\Gamma(s)\end{aligned}$$

ist. Die Gleichung (1) folgt jetzt durch Induktion, da $\Gamma(1)$ nach (6) gleich 1 ist.

Wenn wir (4) in der Gestalt

$$(7) \quad \Gamma(s+1) = s\Gamma(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{N^s}{\left(1 + \frac{s}{1}\right) \left(1 + \frac{s}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{s}{N-1}\right)} \right]$$

schreiben und Logarithmen nehmen, erhalten wir für $|s| < 1$

$$\begin{aligned}\log \Gamma(s+1) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[s \log N - \sum_{n=1}^{N-1} \log \left(1 + \frac{s}{n} \right) \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[s \log N - \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{s}{n} - \frac{s^2}{2n^2} + \frac{s^3}{3n^3} - \dots \right) \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[s \left(\log N - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N-1} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{s^2}{2} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(N-1)^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{s^3}{3} \left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{(N-1)^3} \right) + \dots \right].\end{aligned}$$

Die Folge $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N-1} - \log N$ hat, wie man leicht zeigt, für $N \rightarrow \infty$ einen Grenzwert, den man mit γ bezeichnet und die *Eulersche Konstante* nennt. Für $r \geq 2$ strebt $1 + \frac{1}{2^r} + \dots + \frac{1}{(N-1)^r}$ nach dem Limes $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} = \zeta(r)$, wo $\zeta(r)$ die in (1.11) eingeführte Riemannsche Zetafunktion bezeichnet. Es gilt also

$$(8) \quad \log \Gamma(1+s) = -\gamma s + \frac{\zeta(2)}{2} s^2 - \frac{\zeta(3)}{3} s^3 + \dots \quad (|s| < 1).$$

(Die Vertauschung von Summation und Grenzübergang ist erlaubt: vgl. Aufgabe 1.) Die Werte der Zetafunktion an ganzzahligen Stellen treten also als Koeffizienten der Taylorentwicklung von $\log \Gamma(s)$ an der Stelle $s = 1$ auf.

Wir können mit Hilfe der Beziehung

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} = \log N + \gamma + o(1)$$

auch eine weitere Produktformel für $\Gamma(s)$ herleiten, indem wir

$$\begin{aligned}N^s &= e^{s \log N} = e^{s \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} - \gamma + o(1) \right)} \\ &\sim e^{-\gamma s} e^{s \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} \right)}\end{aligned}$$

in (7) einsetzen; dies liefert die Formel

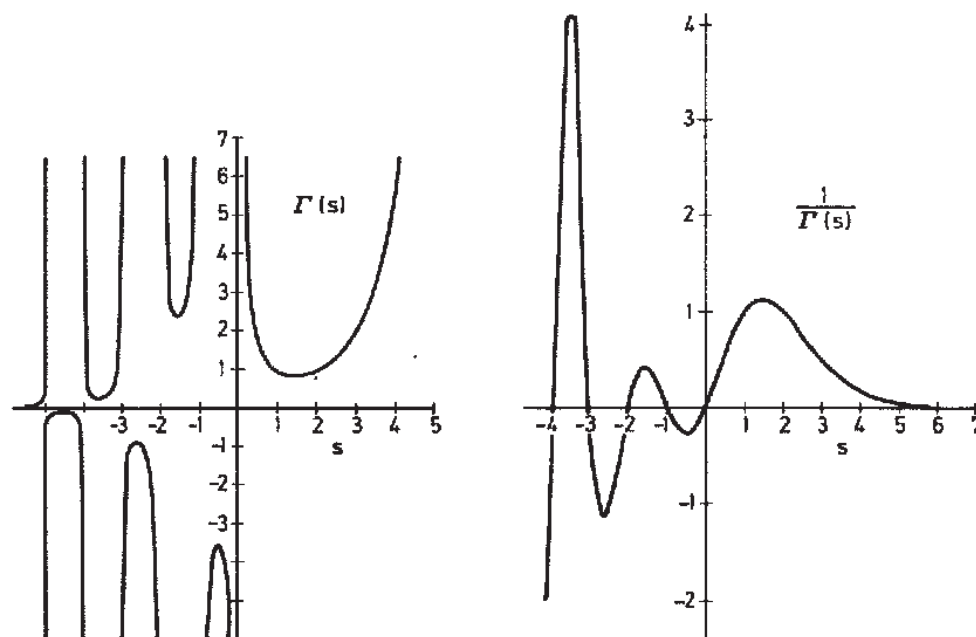
$$(9) \quad \frac{1}{\Gamma(s)} = s e^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{s}{n} \right) e^{-s/n} \right],$$

die sogenannte Weierstraßsche Produktdarstellung. Aus (6) oder (9) folgt, daß die Funktion $1/\Gamma(s)$ in der ganzen komplexen Ebene definiert und holomorph ist (weil die Produktentwicklungen jeweils kon-

vergieren). Ferner hat $1/\Gamma(s)$ nach (9) einfache Nullstellen bei $s = 0, -1, -2, \dots$ und ist sonst von Null verschieden. Das beweist folgenden

SATZ: Die durch (4), (6) oder (9) erklärte Funktion $\Gamma(s)$ ist in der ganzen komplexen Ebene als meromorphe Funktion von s definiert. Sie hat bei $s = 0, -1, -2, \dots$ einfache Pole und ist sonst holomorph. Außerdem ist sie nie gleich Null, d.h. die Funktion $1/\Gamma(s)$ ist überall holomorph.

Auf der reellen Achse sehen $\Gamma(s)$ bzw. $\frac{1}{\Gamma(s)}$ so aus:



Wir geben noch ein paar Eigenschaften der Γ -Funktion an.

1. Sei

$$f(s) = \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right);$$

dann gilt

$$f(s+1) = \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) = \frac{s}{2} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{s}{2} f(s)$$

oder $2^{s+1} f(s+1) = s \cdot 2^s f(s)$. Es ist dann naheliegend zu vermuten, daß $2^s f(s)$ eine Konstante mal $\Gamma(s)$ ist, und dies ist auch der Fall:

$$\begin{aligned} 2^s \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} 2^s \left[\frac{\frac{s}{2} N^{\frac{s}{2}} (N-1)!}{\frac{s}{2} (\frac{s}{2}+1) \dots (\frac{s}{2}+N-1)} \cdot \frac{N^{\frac{s+1}{2}} (N-1)!}{(\frac{s+1}{2}) (\frac{s+1}{2}+1) \dots (\frac{s+1}{2}+N-1)} \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{2^{2N+s} N^{\frac{s+1}{2}} (N-1)!^2}{s(s+2)(s+4) \dots (s+2N-2) \times (s+1)(s+3) \dots (s+2N-1)} \right] \end{aligned}$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[2^{2N} N^{\frac{1}{2}} \frac{(N-1)!^2}{(2N-1)!} \frac{(2N)^s (2N-1)!}{s(s+1)(s+2) \dots (s+2N-1)} \right]$$

$$= C \Gamma(s)$$

mit

$$(10) \quad C = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[2^{2N} N^{\frac{1}{2}} \frac{(N-1)!^2}{(2N-1)!} \right].$$

Die Konstante C ist gleich $2\sqrt{\pi}$ (siehe Aufgabe 4), also erhalten wir

$$(11) \quad \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = 2^{1-s} \sqrt{\pi} \Gamma(s),$$

die Legendresche Verdoppelungsformel. Insbesondere folgt mit $s = 1$, daß

$$(12) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

2. Die Funktion $\frac{1}{\Gamma(s)}$ ist holomorph und hat Nullstellen bei $s = 0, -1, -2, \dots$, also ist die Funktion

$$g(s) = \frac{1}{\Gamma(s) \Gamma(1-s)}$$

auch holomorph und hat Nullstellen bei $s = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$. Außerdem ist

$$g(s+1) = \frac{1}{\Gamma(1+s) \Gamma(-s)} = \frac{1}{s \Gamma(s) \Gamma(-s)} = \frac{-1}{\Gamma(s) \Gamma(1-s)} = -g(s)$$

insbesondere ist $g(s)$ periodisch mit Periode 2. Es liegt dann nahe, daß $g(s) = C \sin \pi s$ ist, wobei die Konstante C wegen $\lim_{s \rightarrow 0} [g(s)/s] = \lim_{s \rightarrow 0} [1/\Gamma(1+s) \Gamma(1-s)] = 1$ gleich $1/\pi$ sein muß:

$$(13) \quad \Gamma(s) \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

Diese Formel ist auch richtig, z.B. wegen (9) und der bekannten Beziehung

$$(14) \quad \frac{\sin \pi s}{\pi s} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right).$$

3. Schließlich sei

$$h(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt.$$

Das Integral konvergiert für $\sigma > 0$ und es gilt

$$h(s+1) = \int_0^{\infty} t^s d(-e^{-t}) = \int_0^{\infty} e^{-t} d(t^s)$$

$$= s \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt = sh(s)$$

(partielle Integration) und

$$h(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1 ;$$

die Funktion $h(s)$ ist also ein Kandidat für die ursprünglich gesuchte Funktion $\Gamma(s)$ mit den Eigenschaften (1) und (2). Es ist in der Tat nicht schwer zu zeigen, daß $h(s) = \Gamma(s)$ ist (siehe Aufgabe 6), also

$$(15) \quad \Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt \quad (\sigma > 0) .$$

Es ist diese Formel, die die Wichtigkeit der Gammafunktion für die Theorie der Dirichletschen Reihen erklärt. Man hat nämlich

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-nt} dt &= n^{-s} \int_0^{\infty} u^{s-1} e^{-u} du \quad (u = nt) \\ &= \Gamma(s) n^{-s} , \end{aligned}$$

also (im Bereich der absoluten Konvergenz)

$$(16) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nt} \right) t^{s-1} dt .$$

Das heißt, die (gewöhnliche) Dirichletsche Reihe $f(s) = \sum a_n n^{-s}$ und die Potenzreihe $F(z) = \sum a_n z^n$ mit denselben Koeffizienten sind durch die Integraltransformation

$$(17) \quad f(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} F(e^{-t}) t^{s-1} dt ,$$

die sogenannte *Mellinsche Transformation*, miteinander verknüpft. Dies ermöglicht es häufig, von Eigenschaften von Potenzreihen auf Eigenschaften von Dirichletschen Reihen zu schließen oder umgekehrt.

Natürlich gilt auch für nicht-gewöhnliche Dirichletsche Reihen das Analogon von (16), nämlich

$$(18) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n t} \right) t^{s-1} dt .$$

Als Beispiele für (16) nehmen wir die Dirichletschen Reihen, die in §1 als Beispiele verwendet wurden:

Für $\zeta(s) = \sum n^{-s}$ ist $a_n = 1$, also $\sum a_n e^{-nt} = \frac{1}{e^t - 1}$, und wir finden

$$(19) \quad \zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1} dt}{e^t - 1} \quad (\sigma > 1) .$$

Für $\psi(s) = \sum (-1)^{n-1} n^{-s} = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s)$ ist $a_n = (-1)^{n-1}$, also $\sum a_n e^{-nt} = \frac{1}{e^t + 1}$, und wir finden

$$(20) \quad (1 - 2^{1-s}) \zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1} dt}{e^t + 1} \quad (\sigma > 0) .$$

Aufgaben:

1. Man zeige die Existenz von $\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} - \log N)$ und die Zulässigkeit der Vertauschung von Summation und Grenzübergang, die zu (8) führte.

2. Man beweise für jede natürliche Zahl n die Beziehung

$$n^s \Gamma\left(\frac{s}{n}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{s+n-1}{n}\right) = C_n \Gamma(s)$$

mit einer nur von n abhängigen Konstanten (es ist $C_n = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{n}$, siehe Aufgabe 5). Diese Formel stammt von Gauß.

3. Man bestimme das Residuum von $\Gamma(s)$ an jeder Polstelle.
4. Man beweise, daß die durch (10) definierte Konstante C gleich $2\sqrt{\pi}$ ist, indem man aus (13) den Wert $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ entnimmt und $s = 1$ in die Beziehung

$$2^s \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = C \Gamma(s)$$

einsetzt. Man schließe auch aus (12) und (15), daß

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

ist.

5. Man beweise die Stirlingsche Formel

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} \quad (x \rightarrow \infty) ,$$

indem man zunächst den Beweis der Existenz des Limes (4) nachahmt,

um zu zeigen, daß der Grenzwert $A = \lim_{x \rightarrow \infty} [\Gamma(x)/x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}]$ existiert,

und dann aus der in Aufgabe 4 bewiesenen Tatsache, daß die rechte Seite von (10) gleich $2\sqrt{\pi}$ ist, die Beziehung $A = \sqrt{2\pi}$ folgert.

Man benutze auch die Stirlingsche Formel, um für die Konstante C_n

in Aufgabe 2 den Wert $(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{n}$ zu erhalten.

6. Man beweise (15), indem man die Beziehungen

$$\int_0^N \left(1 - \frac{t}{N}\right)^N t^{s-1} dt = N^s \sum_{r=0}^N \frac{(-1)^r \binom{N}{r}}{r+s} = \frac{N}{N+s} \Gamma_N(s)$$

nachweist (die erste durch gliedweise Integration, die zweite durch Vergleich der Polstellen der zwei rationalen Funktionen von s) und dann unter Benutzung von $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{N}\right)^N = e^{-t}$ den Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ (streng) durchführt.

§4 Die Riemannsche Zetafunktion

Die einfachste und wichtigste Dirichletsche Reihe ist die in (1.11) eingeführte Riemannsche ζ -Funktion

$$(1) \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (\sigma > 1).$$

Wir haben schon in §1 gesehen, daß $\zeta(s)$ sich als meromorphe Funktion in die Halbebene $\sigma > 0$ fortsetzen läßt, und zwar (Aufgabe 3, §1) mit einem einfachen Pol bei $s = 1$ als einzige Singularität. Wir haben auch in §2 die für $\sigma > 1$ gültige Eulersche Produktdarstellung

$$(2) \quad \zeta(s) = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

bewiesen und in §3 die ebenfalls für $\sigma > 1$ geltende Integraldarstellung

$$(3) \quad \zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$$

gewonnen. Die wichtigsten in diesem Paragraphen bewiesenen Eigenschaften der ζ -Funktion sind im folgenden Satz zusammengestellt.

SATZ: Die durch (1) für $\sigma > 1$ definierte Funktion $\zeta(s)$ besitzt eine meromorphe Fortsetzung in die ganze komplexe Ebene, und zwar mit einem einfachen Pol vom Residuum 1 an der Stelle $s = 1$ als einzige Polstelle. Die Werte der ζ -Funktion bei nichtpositiven ganzen Zahlen sind rational, und zwar ist

$$(4) \quad \zeta(0) = -\frac{1}{2}$$

$$(5) \quad \zeta(-2n) = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$(6) \quad \zeta(1-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

wobei die rationalen Zahlen $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = \frac{-1}{30}$, ... die durch

$$(7) \quad \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^k \quad (|t| < 2\pi)$$

definierten Bernoullischen Zahlen sind. Die Werte der Zetafunktion an positiven geraden ganzen Zahlen sind durch

$$(8) \quad \zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1} B_{2n}}{(2n)!} \pi^{2n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

gegeben.

Beweis: Wir gehen von der Integraldarstellung (3) aus. Seien die Zahlen B_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) durch (7) definiert, d.h. wir entwickeln

$$\frac{t}{e^t - 1} = \frac{t}{t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots} = 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{12} + 0t^3 - \frac{t^4}{720} + \dots$$

und definieren B_n als $n!$ mal den Koeffizienten von t^n auf der rechten Seite; aus

$$\frac{t}{e^t - 1} - \frac{-t}{e^{-t} - 1} = -t$$

folgt, daß abgesehen von $B_1 = -\frac{1}{2}$ alle B_n mit n ungerade Null sind. Sei jetzt $n > 0$ fest und

$$f_n(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{B_k}{k!} t^k = 1 + \frac{t}{2} + \frac{B_2}{2!} t^2 + \dots + \frac{B_n}{n!} t^n$$

(für $n > 1$ ist $(-1)^n B_n = B_n$). Dann ist für $\sigma > 1$

$$\begin{aligned} \Gamma(s) \cdot \zeta(s) &= \int_0^{\infty} \frac{te^t}{e^t - 1} e^{-t} t^{s-2} dt \\ (9) \quad &= \int_0^{\infty} \left(\frac{te^t}{e^t - 1} - f_n(t) \right) e^{-t} t^{s-2} dt + \int_0^{\infty} f_n(t) e^{-t} t^{s-2} dt \\ &= I_1(s) + I_2(s), \end{aligned}$$

wobei wir mit I_1 und I_2 die beiden Integrale bezeichnen. Die Funk-

tion $\frac{te^t}{e^t-1}$ ist bei $t = 0$ holomorph und hat dort die Taylor-Entwicklung

$$\frac{te^t}{e^t-1} = \frac{-t}{e^{-t}-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} B_k t^k,$$

und somit

$$\frac{te^t}{e^t-1} - f_n(t) = O(t^{n+1}) \quad (t \rightarrow 0).$$

Es folgt daraus, daß das Integral $I_1(s)$ konvergiert für alle s mit $\sigma > -n$ (da der Integrand für $t \rightarrow 0$ $O(t^{n+\sigma-1})$ ist und für $t \rightarrow \infty$ exponentiell klein ist), also stellt $I_1(s)$ im Bereich $\sigma > -n$ eine holomorphe Funktion dar. Das zweite Integral $I_2(s)$ ist nur für $\sigma > 1$ konvergent, läßt sich aber, da $f_n(t)$ ein Polynom ist, mit Hilfe von (3.15) explizit ausrechnen:

$$\begin{aligned} I_2(s) &= \int_0^{\infty} \left[1 + \frac{t}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{B_k}{k!} t^k \right] e^{-t} t^{s-2} dt \\ (10) \quad &= \Gamma(s-1) + \frac{1}{2} \Gamma(s) + \sum_{k=2}^n \frac{B_k}{k!} \Gamma(s+k-1). \end{aligned}$$

Das ist wegen der Ergebnisse von §3 eine in der ganzen komplexen Ebene meromorphe Funktion, und somit haben wir bewiesen, daß $\zeta(s)$ sich in die Halbebene $\sigma > -n$ (und deswegen, da n beliebig war, in ganz $\mathbb{C}$) meromorph fortsetzen läßt. Indem wir (10) in (9) einsetzen und die Funktionalgleichung (3.3) anwenden, erhalten wir die für $\sigma > -n$ gültige Darstellung

$$(11) \quad \zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{B_k}{k!} s(s+1)\dots(s+k-2) + \frac{1}{\Gamma(s)} I_1(s)$$

der ζ -Funktion, wobei $I_1(s)$ in $\sigma > -n$ holomorph ist. Da nach §3 die Funktion $\frac{1}{\Gamma(s)}$ überall holomorph ist, zeigt diese Formel, daß $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ in $\sigma > -n$ holomorph ist; da n beliebig war, ist $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ sogar in ganz $\mathbb{C}$ holomorph, und die erste Behauptung des Satzes ist bewiesen.

Sei jetzt s eine ganze Zahl, die $> -n$ und ≤ 0 ist; dann ist $\frac{1}{\Gamma(s)} I_1(s)$ wegen des Pols der Γ -Funktion an der Stelle s gleich Null, und somit ist

$$\begin{aligned} (12) \quad \zeta(s) &= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \frac{s}{12} - \frac{s(s+1)(s+2)}{720} + \frac{s(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}{30240} \\ &\quad - \dots + \frac{B_n}{n!} s(s+1)\dots(s+n-2) \quad (s = 0, -1, -2, \dots, -n+1). \end{aligned}$$

Dies zeigt, daß

$$\begin{aligned}
 \zeta(0) &= \frac{1}{-1} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \\
 \zeta(-1) &= \frac{1}{-2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = -\frac{1}{12} \\
 (13) \quad \zeta(-2) &= \frac{1}{-3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + 0 = 0 \\
 \zeta(-3) &= \frac{1}{-4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{120} = \frac{1}{120} \\
 \zeta(-4) &= \frac{1}{-5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{30} + 0 = 0
 \end{aligned}$$

gilt. Es ist klar, daß man dieses Verfahren (mit n genügend groß) fortsetzen könnte, um $\zeta(-k)$ für jede nichtnegative ganze Zahl k auszurechnen, und daß die Werte alle rational ausfallen. Aus (12) bekommt man explizit

$$\begin{aligned}
 \zeta(-k) &= \frac{-1}{k+1} + \frac{1}{2} + \sum_{r=2}^n \frac{B_r}{r!} (-k)(-k+1)\dots(-k+r-2) \quad (n > k) \\
 &= -\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} + \sum_{r=2}^{k+1} (-1)^{r-1} \frac{B_r}{r!} \frac{k!}{(k+1-r)!} \\
 &= -\frac{1}{k+1} \sum_{r=0}^{k+1} \binom{k+1}{r} B_r.
 \end{aligned}$$

Daß diese Summe, wie in (5), (6) behauptet, für $k > 0$ immer gleich ihrem letzten Glied $-\frac{B_{k+1}}{k+1}$ ist (vgl. die Beispiele (13)), d.h. daß die Bernoullischen Zahlen der Beziehung

$$(14) \quad \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} B_r = (-1)^n B_n$$

genügen, läßt sich leicht mit Hilfe der erzeugenden Reihe (7) beweisen:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} B_r \right] \frac{t^n}{n!} &= \sum_{0 \leq r \leq n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_r t^n}{r!(n-r)!} \\
 &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_r t^{r+k}}{r!k!} = \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{B_r}{r!} t^r \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \right) \\
 &= \frac{t}{e^t - 1} \cdot e^t = \frac{-t}{e^{-t} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_n \frac{t^n}{n!}.
 \end{aligned}$$

Die Beziehung (14) kann übrigens als Rekursionsformel zur Berechnung der B_n benutzt werden.

Es bleibt nur noch, die Behauptung (8) über die Werte von $\zeta(2n)$ zu beweisen, also die Beziehungen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{10}} = \frac{\pi^{10}}{93555}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{12}} = \frac{691 \pi^{12}}{638512875}, \dots,$$

von denen die beiden ersten von Euler entdeckt wurden, der sehr stolz darauf war. Mit Hilfe der Gleichungen (13) und (8) aus §3 erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2^{2n-1} \pi^{2n} \frac{B_{2n}}{(2n)!} s^{2n} &= -\frac{1}{2} \left[\frac{2\pi i s}{e^{2\pi i s} - 1} - 1 + \frac{2\pi i s}{2} \right] \\ &\quad (|s| < 1) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\pi i s}{2} \frac{e^{\pi i s} + e^{-\pi i s}}{e^{\pi i s} - e^{-\pi i s}} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\pi s}{\tan \pi s} \right) \\ &= \frac{s}{2} \frac{d}{ds} \log \frac{\pi s}{\sin \pi s} \\ &= \frac{s}{2} \frac{d}{ds} \log [\Gamma(1+s) \Gamma(1-s)] \\ &= \frac{s}{2} \frac{d}{ds} \left[\zeta(2) s^2 + \frac{\zeta(4)}{2} s^4 + \dots \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n) s^{2n} \end{aligned}$$

(man braucht übrigens hier nicht die Γ -Funktion, sondern kann direkt aus (3.14) schließen, daß $\frac{s}{2} \frac{d}{ds} \log \frac{\pi s}{\sin \pi s} = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k) s^{2k}$ ist). Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Die Tatsache, daß die Werte von $\zeta(2n)$ und $\zeta(1-2n)$ dieselben Bernoulli-Zahlen enthalten, läßt denken, daß es vielleicht überhaupt eine Beziehung zwischen $\zeta(s)$ und $\zeta(1-s)$ gibt. Wenn wir (5), (6) und (8) zusammenfassen als

$$\frac{2^{k-1} \pi^k}{(k-1)!} \zeta(1-k) = \begin{cases} (-1)^{k/2} \zeta(k) & k > 0, k \text{ gerade} \\ 0 & k > 1, k \text{ ungerade} \end{cases}$$

und bedenken, daß die Funktion $k \mapsto (k-1)!$ nach §3 die Interpolationsfunktion $\Gamma(k)$ hat, während

$$k \mapsto \begin{cases} (-1)^{k/2} & k \text{ gerade} \\ 0 & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

auf natürliche Weise durch $\cos \frac{\pi k}{2}$ interpoliert wird, dann liegt es nahe, die Beziehung

$$(15) \quad \frac{2^{s-1} \pi^s}{\Gamma(s)} \zeta(1-s) = \cos \frac{\pi s}{2} \zeta(s)$$

zu vermuten. Das ist die berühmte *Funktionalgleichung der ζ -Funktion*, die von Euler 1749 aufgrund analoger Überlegungen vermutet wurde (in "Remarques sur un beau rapport entre les series des puissances tant directes que réciproques", einer der Berliner Akademie vorgelegten Arbeit) und erst 1859 von Riemann in seiner bahnbrechenden Arbeit "Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe" bewiesen wurde. (Ein Beweis der Funktionalgleichung wird in Aufgabe 2 angedeutet.) Durch Anwendung der Funktionalgleichungen (3.11), (3.13) der Γ -Funktion kann sie auch symmetrischer geschrieben werden in der Form

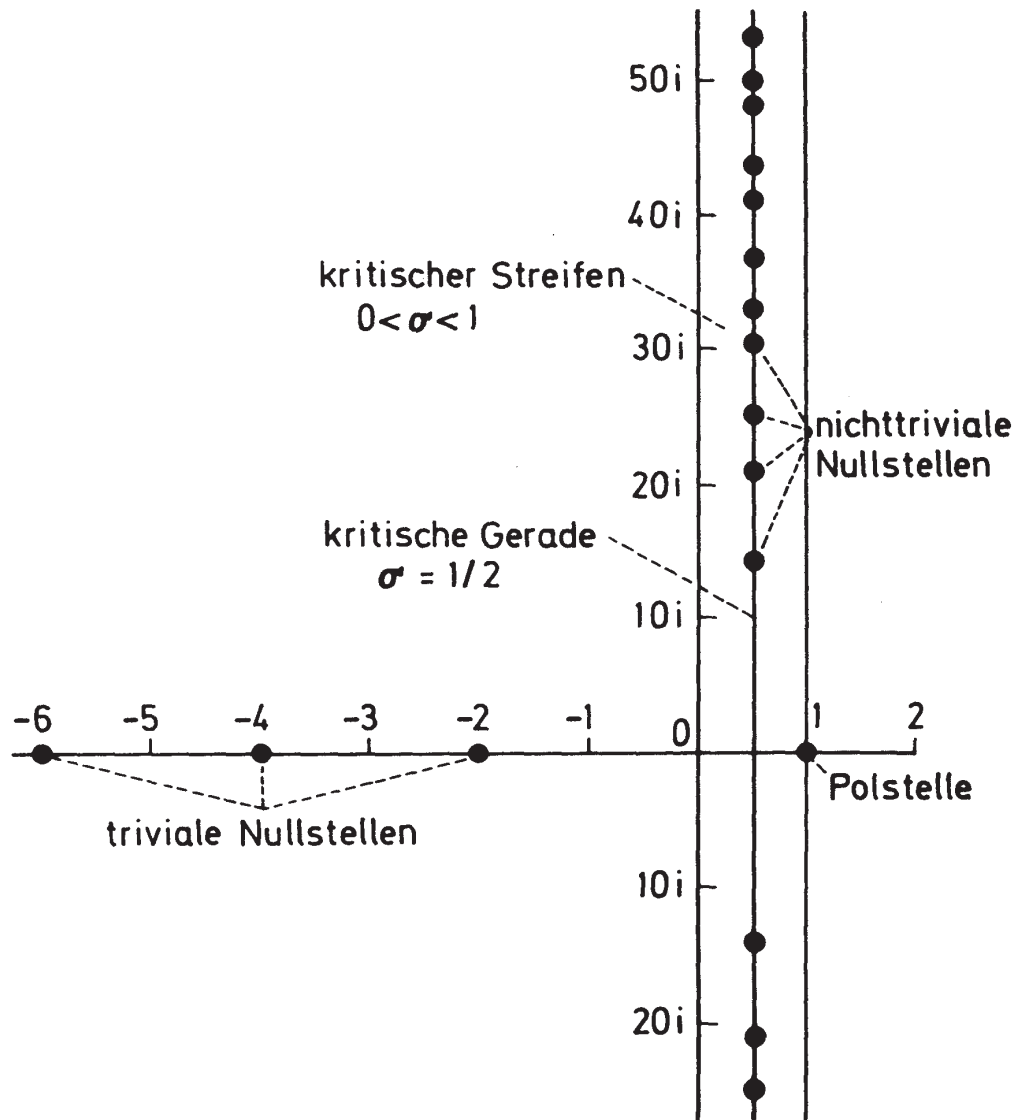
$$(16) \quad \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s) .$$

Für $\sigma > 1$ ist die linke Seite von (16) von Null verschieden, da (wie in §2 schon bemerkt) die Produktdarstellung (2) impliziert, daß $\zeta(s)$ dort nicht verschwindet. Es folgt dann aus (16), daß $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma < 0$ nur dort Nullstellen hat, wo $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ Polstellen hat, d.h. nur einfache Nullstellen bei $s = -2, -4, -6, \dots$. Die Funktion $\zeta(s)$ hat also

- eine einfache Polstelle bei $s = 1$,
- einfache Nullstellen bei $s = -2, -4, \dots$
(die sog. "trivialen Wurzeln") ,
- und sonst Nullstellen höchstens in dem
"kritischen Streifen" $0 < \sigma < 1$, wo
sie in der Tat unendlich viele besitzt .

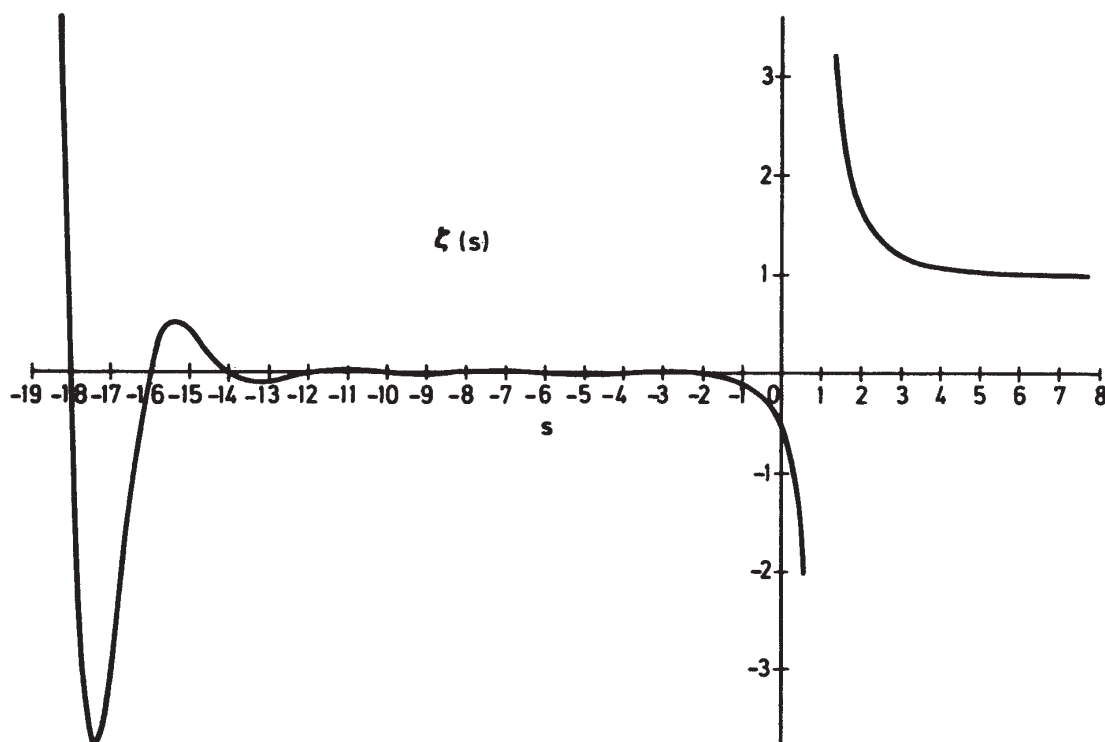
Die dem Absolutbetrag nach kleinsten Nullstellen in dem kritischen Streifen sind

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \pm 14,134725\dots i , \\ \frac{1}{2} \pm 21,022040\dots i , \\ \frac{1}{2} \pm 25,010856\dots i , \\ \frac{1}{2} \pm 30,424878\dots i . \end{aligned}$$



Es ist naheliegend zu vermuten, daß *alle* Nullstellen in dem kritischen Streifen Realteil $1/2$ haben. Das ist die berühmte, bis heute unbewiesene (und möglicherweise falsche) *Riemannsche Vermutung*. Man weiß, daß unendlich viele Nullstellen von $\zeta(s)$ auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ liegen und auch, daß die ersten 150.000.000 Nullstellen in dem kritischen Streifen das tun.

Auf der reellen Achse sieht $\zeta(s)$ so aus:



Aufgaben:

1. Für die am Ende des §2 eingeführte Funktion

$$L(s) = 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \dots$$

zeige man:

a) $L(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1} dt}{e^t + e^{-t}} \quad (\sigma > 0),$

b) $L(s)$ hat eine holomorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$.

c) $L(-n) = \frac{1}{2} E_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$

wobei E_n die durch

$$\frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} x^n$$

definierten *Eulerschen Zahlen* sind ($E_0 = 1, E_2 = -1, E_4 = 5, E_6 = -61, \dots, E_1 = E_3 = E_5 = \dots = 0$).

d) $L(2n+1) = \frac{(-1)^n E_{2n}}{2^{2n+2} (2n)!} \pi^{2n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$

2. Man beweise die Funktionalgleichung (15), indem man folgende Schritte durchföhrt:

a) Ausgehend von (3) zeige man für $\sigma > 1$

$$\Gamma(s) \zeta(s) = \int_0^1 \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) x^{s-1} dx + \frac{1}{s-1} + \int_1^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx ;$$

diese Gleichung gilt für $\sigma > 0$ wegen analytischer Fortsetzung und läßt sich für $0 < \sigma < 1$ schreiben als

$$\Gamma(s) \zeta(s) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) x^{s-1} dx .$$

b) Ausgehend von a) zeige man für $0 < \sigma < 1$

$$\begin{aligned} \Gamma(s) \zeta(s) &= \int_0^1 \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) x^{s-1} dx - \frac{1}{2s} \\ &\quad + \int_1^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) x^{s-1} dx , \end{aligned}$$

was wiederum für $-1 < \sigma < 1$ wegen analytischer Fortsetzung gelten muß und für $-1 < \sigma < 0$ die Formel

$$\Gamma(s) \zeta(s) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) x^{s-1} dx$$

liefert.

c) Man schließe aus (3.14), daß

$$\frac{\pi s}{\tan \pi s} - 1 = s \frac{d}{ds} \log \frac{\sin \pi s}{\pi s} = - \sum_{n=1}^\infty \frac{2s^2}{n^2 - s^2}$$

gilt, und setze $s = \frac{ix}{2\pi}$, um

$$\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{x} \left(\frac{ix/2}{\tan ix/2} - 1 \right) = \sum_{n=1}^\infty \frac{2x}{x^2 + 4n^2 \pi^2}$$

zu erhalten.

d) Man setze c) in b) ein, um (nach einer wegen absoluter Konvergenz zulässigen Vertauschung von Integral und Summation) die Formel

$$\Gamma(s) \zeta(s) = 2 \sum_{n=1}^\infty (2\pi n)^{s-1} \int_0^\infty \frac{t^s}{t^2 + 1} dt = \frac{2^{s-1} \pi^s}{\cos \frac{\pi s}{2}} \zeta(1-s)$$

für $-1 < \sigma < 0$ zu beweisen; nach analytischer Fortsetzung ist die Funktionalgleichung dann für alle s bewiesen.