

*Note.* For cusp forms, better estimates for the order of magnitude of the  $c(n)$  have been obtained by Kloosterman, Salié, Davenport, Rankin, and Selberg (see [46]). It has been shown that

$$c(n) = O(n^{k - (1/4) + \epsilon})$$

for every  $\epsilon > 0$ , and it has been conjectured that the exponent can be further improved to  $k - \frac{1}{2} + \epsilon$ . For the discriminant  $\Delta$ , Ramanujan conjectured the sharper estimate

$$|\tau(p)| \leq 2p^{1/2}$$

for primes  $p$ . This was recently proved by P. Deligne [7].

### 6.16 Modular forms and Dirichlet series

Hecke found a remarkable connection between each modular form with Fourier series

$$(49) \quad f(\tau) = c(0) + \sum_{n=1}^{\infty} c(n)e^{2\pi in\tau}$$

and the Dirichlet series

$$(50) \quad \varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)}{n^s}$$

formed with the same coefficients (except for  $c(0)$ ). If  $f \in M_{2k}$  then  $c(n) = O(n^k)$  if  $f$  is a cusp form, and  $c(n) = O(n^{2k-1})$  if  $f$  is not a cusp form. Therefore, the Dirichlet series in (50) converges absolutely for  $\sigma = \text{Re}(s) > k + 1$  if  $f$  is a cusp form, and for  $\sigma > 2k$  if  $f$  is not a cusp form.

**Theorem 6.19.** *If the coefficients  $c(n)$  satisfy the multiplicative property*

$$(51) \quad c(m)c(n) = \sum_{d|(m,n)} d^{2k-1} c\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$

*the Dirichlet series will have an Euler product representation of the form*

$$(52) \quad \varphi(s) = \prod_p \frac{1}{1 - c(p)p^{-s} + p^{2k-1}p^{-2s}},$$

*absolutely convergent with the Dirichlet series.*

**PROOF.** Since the coefficients are multiplicative we have (see [4], Theorem 11.7)

$$(53) \quad \varphi(s) = \prod_p \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c(p^n)p^{-ns} \right\}$$

whenever the Dirichlet series converges absolutely. Now (51) implies

$$c(p)c(p^n) = c(p^{n+1}) + p^{2k-1}c(p^{n-1})$$

for each prime  $p$ . Using this it is easy to verify the power series identity

$$(1 - c(p)x + p^{2k-1}x^2) \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c(p^n)x^n \right) = 1$$

for all  $|x| < 1$ . Taking  $x = p^{-s}$ , we find that (53) reduces to (52).  $\square$

**EXAMPLE.** For the Ramanujan function we have the Euler product representation

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \tau(p)p^{-s} + p^{1-2s}}$$

for  $\sigma > 7$  since  $\tau(n) = O(n^6)$ .

Hecke also deduced the following analytic properties of  $\varphi(s)$ .

**Theorem 6.20.** *Let  $\varphi(s)$  be the function defined for  $\sigma > k$  by the Dirichlet series (50) associated with a modular form  $f(\tau)$  in  $M_k$  having the Fourier series (49), where  $k$  is an even integer  $\geq 4$ . Then  $\varphi(s)$  can be continued analytically beyond the line  $\sigma = k$  with the following properties:*

- (a) *If  $c(0) = 0$ ,  $\varphi(s)$  is an entire function of  $s$ .*
- (b) *If  $c(0) \neq 0$ ,  $\varphi(s)$  is analytic for all  $s$  except for a simple pole at  $s = k$  with residue*

$$\frac{(-1)^{k/2}c(0)(2\pi)^k}{\Gamma(k)}.$$

- (c) *The function  $\varphi$  satisfies the functional equation*

$$(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\varphi(s) = (-1)^{k/2}(2\pi)^{s-k}\Gamma(k-s)\varphi(k-s).$$

**PROOF.** From the integral representation for  $\Gamma(s)$  we have

$$\Gamma(s)(2\pi)^{-s} = \int_0^{\infty} e^{-2\pi ny}y^{s-1}dy$$

if  $\sigma > 0$ . Therefore if  $\sigma > k$  we can multiply both members by  $c(n)$  and sum on  $n$  to obtain

$$(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\varphi(s) = \int_0^{\infty} \{f(iy) - c(0)\}y^{s-1}dy.$$

Schwerpunkt legen auf

- a) Holomorphie der Abbildungen oder
- b) Birationalität der Abbildungen oder
- c) Erhalt metrischer Eigenschaften

usw. Keine dieser Verallgemeinerungen wird hier besprochen. Auf einige der bei Verallgemeinerungen wichtigen Aspekte wird jedoch in Abschnitten eingegangen, die bei einer ersten Lektüre überschlagen werden können.

## §1. Die obere Halbebene

In diesem Paragraphen wird die obere Halbebene  $\mathbb{H}$  in  $\mathbb{C}$  genauer untersucht. Die Automorphismengruppe von  $\mathbb{H}$  wird beschrieben. Dann wird die hyperbolische Geometrie entwickelt.

**1. Gebrochen lineare Transformationen.** Wir schreiben  $2 \times 2$  Matrizen meist in der Form

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

und benutzen wie üblich für *Determinante* und *Spur* die Abkürzungen

$$\det M := ad - bc, \quad \text{Sp } M := a + d,$$

sowie

$$M^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad M^\sharp = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

für die *transponierte* bzw. *adjungierte* Matrix. Es bezeichne  $GL(2; \mathbb{C})$  die Gruppe der invertierbaren komplexen  $2 \times 2$  Matrizen,

$$GL(2; \mathbb{C}) := \{M \in \text{Mat}(2; \mathbb{C}) ; \det M \neq 0\}.$$

Mit  $E$  wird die Einheitsmatrix abgekürzt. Bekanntlich wird die inverse Matrix zu  $M \in GL(2; \mathbb{C})$  gegeben durch

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} M^\sharp = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Für  $M \in GL(2; \mathbb{C})$  ist unter offensichtlichen Voraussetzungen an  $\tau \in \mathbb{C}$  die komplexe Zahl

$$(1) \quad M\tau := \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

wohldefiniert. Damit wird durch

$$(2) \quad \Phi_M : \tau \mapsto M\tau$$

eine meromorphe Funktion auf  $\mathbb{C}$  gegeben, die auch als *gebrochen lineare Transformation* oder als *MÖBIUS-Transformation* bezeichnet wird. Für  $c = 0$  ist  $\Phi_M$  eine ganze Funktion. Im Fall  $c \neq 0$  hat  $\Phi_M$  genau einen Pol und zwar von 1. Ordnung bei  $\tau = -d/c$ .

**Warnung:** Die Schreibweise  $M\tau$  darf nicht mit der skalaren Multiplikation  $\tau M$  von  $\tau$  mit  $M$  verwechselt werden! Wenn Missverständnisse zu befürchten sind, schreibt man auch  $M\langle\tau\rangle$  anstelle von  $M\tau$ .

Aus (1) folgert man für  $L, M \in GL(2; \mathbb{C})$  und  $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$  wieder unter offensichtlichen Voraussetzungen an  $\tau$  und  $\tau'$ :

$$(3) \quad E\tau = \tau, \quad \text{d. h.} \quad \Phi_E = \text{id},$$

$$(4) \quad (\lambda M)\tau = M\tau, \quad \text{d. h.} \quad \Phi_{\lambda M} = \Phi_M,$$

$$(5) \quad (LM)\tau = L\langle M\tau\rangle, \quad \text{d. h.} \quad \Phi_{LM} = \Phi_L \circ \Phi_M,$$

$$(6) \quad M\tau' - M\tau = \frac{\det M}{(c\tau' + d)(c\tau + d)} \cdot (\tau' - \tau)$$

Schließlich dividiert man (6) durch  $\tau' - \tau$  und erhält für  $\tau' \rightarrow \tau$

$$(7) \quad \Phi'_M(\tau) = \frac{dM\tau}{d\tau} = \frac{\det M}{(c\tau + d)^2}$$

Als Umkehrung von (4) hat man die

**Proposition.** Für  $L, M \in GL(2; \mathbb{C})$  sind äquivalent:

- (i)  $M\tau = L\tau$  gilt für wenigstens drei verschiedene  $\tau \in \mathbb{C}$ .
- (ii) Es gibt  $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$  mit  $M = \lambda L$ .

*Beweis.* Wegen (5) und (3) ist  $M\tau = L\tau$  mit  $(L^{-1}M)\tau = \tau$  äquivalent. Man kann daher in beiden Fällen ohne Einschränkung  $L = E$  annehmen. Da sich  $M\tau = \tau$  jetzt als

$$c\tau^2 + (d - a)\tau - b = 0$$

schreibt, folgt die Behauptung. □

Jeder Kreis in  $\mathbb{C}$  kann durch eine Gleichung der Form

$$(8) \quad A\tau\bar{\tau} + B\tau + \overline{B}\tau + C = 0 \quad \text{mit} \quad A, C \in \mathbb{R}, A \neq 0 \text{ und } B \in \mathbb{C}$$

beschrieben werden. Genauer gilt dann  $|B|^2 > AC$  und der Mittelpunkt  $m$  bzw. der Radius  $r > 0$  werden gegeben durch

$$(9) \quad m = -\overline{B}/A \quad \text{bzw.} \quad r^2 = (|B|^2 - AC)/A^2.$$

Umgekehrt beschreibt (8) im Fall  $A \neq 0$  und  $|B|^2 > AC$  stets einen Kreis. Im Fall  $A = 0, B \neq 0$  erhält man durch (8) genau alle Geraden in  $\mathbb{C}$ .

Zur Untersuchung der Bilder von Geraden und Kreisen unter den gebrochen linearen Transformationen (2) hat man  $z = M\tau$ ,  $M \in GL(2; \mathbb{C})$ , zu betrachten. Man trägt  $\tau = M^{-1}z$  in (8) ein, multipliziert die Nenner hoch und bekommt wieder eine Gleichung der Form

$$\alpha z\bar{z} + \beta z + \overline{\beta z} + \gamma = 0 \quad \text{mit} \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{R} \text{ und } \beta \in \mathbb{C}.$$

Bei richtiger Interpretation erhält man den

**Satz.** *Unter gebrochen linearen Transformationen geht die Menge der Kreise und Geraden in  $\mathbb{C}$  in sich über.*

Schließlich seien noch die offensichtlichen Regeln für das Rechnen mit Unendlich erklärt. Ist  $M$  in der Standardform gegeben, so definiert man

$$(10) \quad M_\infty := \begin{cases} \infty, & \text{falls } c = 0, \\ a/c, & \text{falls } c \neq 0. \end{cases}$$

**Bemerkungen.** a) Die Gleichungen (3), (5) und (10) besagen, dass durch (1) eine Gruppenoperation von  $GL(2; \mathbb{C})$  auf  $\mathbb{P} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  gegeben wird. Nach der Proposition gilt  $\Phi_M = \Phi_L$  für  $M, L \in SL(2; \mathbb{C})$  nur für  $M = \pm L$ . Vermöge (2) erhält man eine natürliche Identifikation der Gruppe  $\text{Aut } \mathbb{P}$  der biholomorphen Selbstabbildungen von  $\mathbb{P}$  mit der Gruppe  $PSL(2; \mathbb{C}) := SL(2; \mathbb{C})/\{\pm E\}$  (vgl. W. FISCHER, I. LIEB [1992], Satz IX.3.1).

b) Ist  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  eine nicht-konstante, holomorphe Funktion auf einem Gebiet  $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ , so ist die SCHWARZ-Derivierte  $\Sigma f$  von  $f$  definiert durch

$$(\Sigma f)(z) := \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''}{f'} \right)^2, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Mit Hilfe von (7) verifiziert man nun  $\Sigma(\Phi_M \circ f) = \Sigma f$  für alle  $M \in GL(2; \mathbb{C})$ . Ist also  $f$  eine Lösung der Differentialgleichung  $\Sigma f = \varphi$ , so ist auch  $\Phi_M \circ f$  für  $M \in GL(2; \mathbb{C})$  eine Lösung.

**2. Die obere Halbebene und der Einheitskreis.** Wie bereits in Kapitel I wird die *obere Halbebene* in  $\mathbb{C}$  mit  $\mathbb{H}$  bezeichnet, also

$$\mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C} ; \text{Im } \tau > 0\}.$$

Darüber hinaus bezeichnen wir den *Einheitskreis* mit  $\mathbb{E}$ , also

$$\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}.$$

Ist  $G$  ein beliebiges Gebiet in  $\mathbb{C}$ , so steht

$$\text{Aut } G := \{\varphi : G \rightarrow G ; \varphi \text{ biholomorph}\}$$

für die *Automorphismengruppe von  $G$* .

# Kapitel III.

## Modulformen

### Einleitung

**1. Vorbemerkung.** Wie die elliptischen Funktionen unter gewissen Selbstabbildungen von  $\mathbb{C}$ , nämlich den Translationen eines Gitters, in sich übergehen, so sind die *Modulfunktionen* unter geeigneten Selbstabbildungen der oberen Halbebene  $\mathbb{H}$ , nämlich den *Modulsubstitutionen*

$$\tau \longmapsto M\tau := \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad \text{mit} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma := SL(2; \mathbb{Z})$$

invariant. Das wichtigste Beispiel einer solchen Funktion, die überdies auf  $\mathbb{H}$  holomorph ist, ist die *absolute Invariante*  $j = j(\tau)$ , die wir bereits in I.4.4 und in II.E.3 kennen gelernt haben. Es wird sich herausstellen, dass man mit  $j$  alle Modulfunktionen beschreiben kann.

**2. Mögliches Transformationsverhalten.** Neben Funktionen, die unter den Modulsubstitutionen invariant bleiben, sind aber auch Funktionen  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  von Interesse, die unter den Modulsubstitutionen wenigstens noch ein übersichtliches Verhalten aufweisen:

$$(1) \quad f(M\tau) = \gamma_M(\tau) \cdot f(\tau) \quad \text{für alle} \quad M \in \Gamma.$$

Dabei sei  $\gamma_M(\tau)$  ein „elementarer“ Faktor, der noch genauer festgelegt werden muss. Schreibt man (1) für  $MN$  anstelle von  $M$  und verwendet  $(MN)\tau = M(N\tau)$ , so erhält man (im Fall  $f(\tau) \neq 0$ ) die Bedingung

$$(2) \quad \gamma_{MN}(\tau) = \gamma_M(N\tau) \cdot \gamma_N(\tau) \quad \text{für} \quad M, N \in \Gamma \quad \text{und} \quad \tau \in \mathbb{H}$$

an  $\gamma$ . Diese „Cozykel-Bedingung“ hat Ähnlichkeit mit der Kettenregel der Differentiation. In der Tat erfüllen

$$(3) \quad \gamma_M(\tau) := \frac{dM\tau}{d\tau} = (c\tau + d)^{-2}$$

und jede Potenz davon (2). Die auf diese Weise für jede gerade Zahl  $k$  entstehende Transformationsformel

$$(4) \quad f(M\tau) = (c\tau + d)^k \cdot f(\tau) \quad \text{für } M \in \Gamma$$

ist dann charakteristisch für die so genannten *Modulformen*. Da die Gruppe der Modulsstitutionen gemäß Korollar II.2.1A durch die Abbildungen

$$(5) \quad \tau \longmapsto \tau + 1 \quad \text{und} \quad \tau \longmapsto -1/\tau$$

erzeugt wird, kann man (4) durch die beiden Bedingungen

$$(6) \quad f(\tau + 1) = f(\tau) \quad \text{und} \quad f(-1/\tau) = \tau^k \cdot f(\tau)$$

ersetzen.

In I.4.1 hatten wir gesehen, dass die EISENSTEIN-Reihen  $G_k$  Beispiele von solchen Funktionen sind. Es soll noch ein weiteres Beispiel skizziert werden, das ein zu (6) analoges Transformationsverhalten besitzt:

**3. Die klassische Theta-Reihe.** In seinen Briefen an GOLDBACH vom 4. 5. 1748 und 17. 8. 1750 behandelt L. EULER im Reellen bereits die *Theta-Reihe*

$$(1) \quad \vartheta(\tau) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau} = 1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \quad \text{mit } q := e^{\pi i \tau} \quad \text{und } \tau \in \mathbb{H}.$$

Im Zusammenhang mit der Wärmeleitungsgleichung tritt die Theta-Reihe dann bei J. FOURIER in *Théorie Analytique de la Chaleur* (Paris 1822) auf (vgl. I.6.7). Im Nachlass von C.F. GAUSS (*Werke III*, 436–445) fand man eine Note etwa aus dem Jahre 1808, in der eine etwas allgemeinere Reihe (nämlich die in I.6.7(1) definierte JACOBISCHE Theta-Reihe  $\vartheta(z; \tau)$ ) betrachtet und für sie bereits eine Transformationsformel bewiesen wird. In den *Fundamenta nova* wird dann von C.G.J. JACOBI (*Ges. Werke I*, 198–239) die allgemeine Reihe

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2} \cos(2nx)$$

unter dem Buchstaben  $\Theta$  eingeführt und zur Darstellung der elliptischen Funktionen verwendet. In der Bezeichnung von I.6.7 ist  $\vartheta(\tau)$  gleich dem *Nullwert*  $\vartheta(0; \tau)$ .

Offenbar ist  $\vartheta(\tau)$  absolut und kompakt-gleichmäßig konvergent auf  $\mathbb{H}$ , so dass  $\vartheta : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ist. Es gilt darüber hinaus

$$(2) \quad \vartheta(\tau + 2) = \vartheta(\tau) \quad \text{für } \tau \in \mathbb{H}.$$

Die Bedeutung und das Interesse, das die Theta-Reihe immer wieder gefunden hat, liegen nun in der so genannten

**Theta-Transformationsformel:**

$$(3) \quad \vartheta(-1/\tau) = \sqrt{\tau/i} \cdot \vartheta(\tau) \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{H}.$$

Dabei ist der Zweig der Wurzel zu wählen, der für positive Argumente selbst positiv ist.

*Beweis.* Man wendet die so genannte POISSONSche Summationsformel auf  $\vartheta(iy)$ ,  $y > 0$ , an oder – was auf dasselbe hinausläuft – entwickelt die modulo 1 periodische, stetig differenzierbare Funktion

$$\varphi(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi(n+t)^2 y}, \quad t \in \mathbb{R},$$

in eine FOURIER-Reihe und erhält

$$\begin{aligned} \vartheta(iy) &= \varphi(0) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m, \\ \alpha_m &:= \int_0^1 \varphi(t) \cdot e^{-2\pi i m t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2 y} \cdot e^{-2\pi i m t} dt. \end{aligned}$$

Hier ist

$$\alpha_m = \beta_m(y) \cdot e^{-\pi m^2 / y} \quad \text{mit} \quad \beta_m(y) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(t\sqrt{y} + im/\sqrt{y})^2} dt = \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \beta_{m/\sqrt{y}}(1).$$

Nach dem CAUCHYSchen Integralsatz hängt  $\beta_m(1) = \beta$  nicht von  $m$  ab (vgl. R. REMMERT, G. SCHUMACHER [2002], 12.4.3) und man erhält

$$\vartheta(iy) = \frac{\beta}{\sqrt{y}} \cdot \vartheta\left(\frac{i}{y}\right) \quad \text{für } y > 0.$$

Setzt man nun  $y = 1$ , so folgt  $\beta = 1$  wegen  $\vartheta(iy) > 0$ . Die Transformationsformel ergibt sich nun durch analytische Fortsetzung.  $\square$

Einen elementaren Beweis der POISSONSchen Summationsformel findet man z.B. bei M. KOECHER [1987], 179–181.

Betrachtet man jetzt  $f(\tau) := \vartheta^8(\tau)$ , so erhält man in Analogie zu 2(6)

$$(4) \quad f(\tau + 2) = f(\tau) \quad \text{und} \quad f(-1/\tau) = \tau^4 \cdot f(\tau).$$

Damit kennt man das Transformationsverhalten von  $f = \vartheta^8$  unter der von den Modulsstitutionen  $\tau \mapsto \tau + 2$  und  $\tau \mapsto -1/\tau$  erzeugten Gruppe von Automorphismen von  $\mathbb{H}$ . Mit der *Theta-Gruppe*  $\Gamma_\vartheta$  in II.3.4 folgt

$$f(M\tau) = (c\tau + d)^4 \cdot f(\tau) \quad \text{für alle } M \in \Gamma_\vartheta.$$

Ein anderer – ebenfalls durch II.3.4 nahegelegter – Ansatz liefert eine Funktion, bei der man das Transformationsverhalten unter allen Modulsstitutionen kennt: Man setzt

$$(5) \quad g(\tau) := \frac{1}{\tau} \cdot \vartheta^2(\tau) \cdot \vartheta^2(\tau + 1) \cdot \vartheta^2(1 - 1/\tau)$$

und verifiziert mit (2) und (3)

$$g(\tau + 1) = i \cdot g(\tau) \quad \text{und} \quad g(-1/\tau) = i \cdot \tau^3 \cdot g(\tau).$$

Die vierte Potenz von  $g$  ist daher eine Modulform im Sinne von 2(6) zu  $k = 12$ . Man vergleiche Satz 4.5 d).

## §1. Die elementare Theorie

Ziel dieses Paragraphen ist es, die elementare Theorie modularer Funktionen zu entwickeln und erste Strukturaussagen herzuleiten.

Es wird vereinbart, den Buchstaben  $M$  für  $2 \times 2$  Matrizen zu reservieren und stets  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  zu schreiben.  $\tau$  aus der oberen Halbebene  $\mathbb{H}$  wird immer in der Form  $\tau = x + iy$  gegeben.

**1. Modulare Funktionen.** Zunächst wird eine Operation von  $SL(2; \mathbb{R})$  auf dem Raum der meromorphen Funktionen auf  $\mathbb{H}$  erklärt:

Sei dazu  $k \in \mathbb{Z}$  und  $f$  auf  $\mathbb{H}$  meromorph. Dann existiert eine diskrete und relativ abgeschlossene Teilmenge  $D_f$  von  $\mathbb{H}$ , so dass  $f$  auf  $\mathbb{H} \setminus D_f$  holomorph ist. Für  $M \in SL(2; \mathbb{R})$  erklärt man eine auf  $\mathbb{H}$  meromorphe Funktion  $f|M = f|_k M$  durch

$$(1) \quad (f|M)(\tau) := (c\tau + d)^{-k} \cdot f(M\tau) \quad \text{für} \quad \tau \in \mathbb{H} \setminus D_{f \circ M}.$$

Auf die Angabe des Buchstabens  $k \in \mathbb{Z}$  wird hier meist verzichtet. Zusammen mit II.1.1(5) ergibt eine Verifikation

$$(2) \quad (f|M)|N = f|(MN) \quad \text{für} \quad M, N \in SL(2; \mathbb{R}).$$

Damit definiert  $(M, f) \mapsto f|M$  eine Operation auf dem Raum der meromorphen Funktionen auf  $\mathbb{H}$ , die *Strichoperator* genannt wird.

Man nennt nun  $f$  *modular vom Gewicht  $k$* , wenn gilt:

$$(M.1) \quad f \text{ ist auf } \mathbb{H} \text{ meromorph.}$$

$$(M.2) \quad f|_k M = f \text{ für alle } M \in \Gamma.$$

Offenbar bilden die modularen Funktionen vom Gewicht  $k$  einen Vektorraum über  $\mathbb{C}$ . Trägt man  $M = -E$  in (M.2) ein, so erhält man die

**Proposition.** *Jede modulare Funktion von ungeradem Gewicht ist 0.*

Es wird daher im Folgenden stets vorausgesetzt, dass  $k$  gerade ist. Wegen (2) und Satz II.2.1 kann man (M.2) ersetzen durch

$$(M.2^*) \quad f(\tau + 1) = f(\tau) \quad \text{und} \quad f(-1/\tau) = \tau^k \cdot f(\tau).$$

Schließlich zeigt II.1.1(7), dass man (1) auch in der Form

$$(3) \quad (f|M)(\tau) = \left( \frac{dM\tau}{d\tau} \right)^{k/2} \cdot f(M\tau)$$

schreiben kann.

**2. Periodische Funktionen.** Es bezeichne wieder

$$\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}$$



die offene Einheitskreisscheibe in  $\mathbb{C}$ . Bekanntlich definiert

$$\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E} \setminus \{0\}, \tau \mapsto z := e^{2\pi i\tau},$$

eine surjektive und modulo 1 periodische holomorphe Funktion. Ist  $f$  auf  $\mathbb{H}$  meromorph mit Polstellenmenge  $D_f$  und periodisch mit der Periode 1 (vgl. I.1.2), dann gibt es bekanntlich (vgl. R. REMMERT, G. SCHUMACHER [2002], Satz 12.3.2) eine auf  $\mathbb{E} \setminus \{0\}$  meromorphe Funktion  $\hat{f}$  mit

$$(1) \quad f(\tau) = \hat{f}(e^{2\pi i\tau}) \quad \text{für} \quad \tau \in \mathbb{H} \setminus D_f.$$

Ist nun umgekehrt  $\hat{f}$  eine auf  $\mathbb{E} \setminus \{0\}$  meromorphe Funktion, so ist die zugehörige Funktion  $f$  der Form (1) auf  $\mathbb{H}$  meromorph und periodisch mit der Periode 1. Man beachte hier, dass sich die Pole von  $f$  bei 0 häufen können! Um dies auszuschließen, sagt man, dass  $f$  bei  $\infty$  höchstens einen Pol hat, wenn  $\hat{f}$  meromorph auf  $\mathbb{E}$  fortsetzbar ist.

Hat nun  $f$  in diesem Sinne bei  $\infty$  höchstens einen Pol, dann ist 0 eine isolierte Singularität von  $\hat{f}$  und es existiert eine LAURENT-Entwicklung von  $\hat{f}$  um 0 mit endlichem Hauptteil (vgl. R. REMMERT, G. SCHUMACHER [2002], Satz 12.2.3)

$$(2) \quad \hat{f}(z) = \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) \cdot z^m,$$

die in einer punktierten Umgebung von 0 absolut und kompakt-gleichmäßig konvergiert. Wegen (1) ist dann  $f$  in eine FOURIER-Reihe

$$(3) \quad f(\tau) = \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi im\tau}$$

entwickelbar, die bei geeignetem  $\gamma > 0$  für  $\text{Im } \tau > \gamma$  absolut und kompakt-gleichmäßig konvergiert. Die Integralformel für die Koeffizienten der LAURENT-Reihe (vgl. R. REMMERT, G. SCHUMACHER [2002], 12.1.3) übersetzt sich dabei in

$$(4) \quad \alpha_f(m) = \int_w^{w+1} f(\tau) \cdot e^{-2\pi im\tau} d\tau,$$

wobei die Integration für  $\text{Im } w > \gamma$  z.B. längs der Strecke von  $w$  bis  $w + 1$  auszuführen ist.

**Lemma.** Für eine auf  $\mathbb{H}$  meromorphe und modulo 1 periodische Funktion  $f \neq 0$  sind äquivalent:

- (i)  $f$  hat bei  $\infty$  höchstens einen Pol.
- (ii) Es gibt  $\gamma > 0$  mit folgenden Eigenschaften:
  - (a)  $f$  ist auf dem Gebiet  $\{\tau \in \mathbb{H}; \text{Im } \tau > \gamma\}$  holomorph.
  - (b) Es gibt ein  $m_0 \in \mathbb{Z}$ , so dass es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $C$  gibt mit

$$|f(\tau)| \leq C \cdot e^{-2\pi m_0 \cdot \text{Im } \tau} \quad \text{für alle } \tau \text{ mit } \text{Im } \tau \geq \gamma + \varepsilon.$$

Dabei ist  $m_0$  das Minimum der  $m \in \mathbb{Z}$  mit  $\alpha_f(m) \neq 0$ .

Ist dies der Fall und ist  $f$  auf  $\mathbb{H}$  holomorph, dann gilt (b) für alle  $\gamma > 0$ .

*Beweis.* Alles wird auf das Verhalten von  $\hat{f}$  in einer Umgebung von 0 zurückgespielt: Man hat für  $\hat{f}$  genau dann ein LAURENT-Reihe der Form (2), wenn eine Abschätzung der Gestalt  $|\hat{f}(z)| \leq C \cdot |z|^{m_0}$  gilt.  $\square$

Ist  $m_0$  wie im Lemma gewählt, so sagt man in Übereinstimmung mit dem Verhalten von  $\hat{f}$  bei 0, dass  $f$  bei  $\infty$

einen Pol der Ordnung  $-m_0$  hat, falls  $m_0 < 0$  gilt,  
 holomorph ist, falls  $m_0 \geq 0$  gilt,  
 eine Nullstelle der Ordnung  $m_0$  hat, falls  $m_0 > 0$  gilt.

Man setzt nun natürlich

$$(5) \quad \text{ord}_\infty f := m_0.$$

**3. Der Begriff der Modulform.** Eine Funktion  $f$  heißt *Modulform vom Gewicht  $k$* , wenn  $f$  modular vom Gewicht  $k$  ist und bei  $\infty$  höchstens einen Pol hat, wenn also gilt:

(M.1)  $f$  ist auf  $\mathbb{H}$  meromorph.

(M.2)  $f|_k M = f$  für alle  $M \in \Gamma$ .

(M.3)  $f$  hat bei  $\infty$  höchstens einen Pol.

Wegen Lemma 2 kann hier (M.3) ersetzt werden durch

(M.3\*)  $f$  besitzt eine FOURIER-Entwicklung der Form

$$f(\tau) = \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m \tau},$$

die bei geeignetem  $\gamma > 0$  für  $\text{Im } \tau \geq \gamma$  absolut und kompakt-gleichmäßig konvergiert.

Da mit  $f$  und  $g$  auch  $\alpha f + \beta g$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , und  $f \cdot g$  höchstens einen Pol bei  $\infty$  haben, ergibt ein Blick auf 1(1), dass die Modulformen vom Gewicht  $k$  einen Vektorraum  $\mathbb{V}_k$  über  $\mathbb{C}$  bilden. Es gilt außerdem

$$(1) \quad \mathbb{V}_k \cdot \mathbb{V}_\ell \subset \mathbb{V}_{k+\ell} \quad \text{für } k, \ell \in \mathbb{Z}.$$

Wegen Proposition 1 hat man natürlich

$$(2) \quad \mathbb{V}_k = \{0\} \quad \text{für ungerades } k.$$

Schließlich ist

$$(3) \quad \frac{1}{f} \in \mathbb{V}_{-k} \quad \text{für} \quad 0 \neq f \in \mathbb{V}_k .$$

Eine Modulform vom Gewicht 0 heißt eine *Modulfunktion*. Wegen (1) und (3) ist die Menge

$$(4) \quad \mathbb{K} := \mathbb{V}_0$$

aller Modulfunktionen ein Körper, der die konstanten Funktionen und alle Quotienten von Modulformen desselben Gewichts enthält.

**Bemerkungen.** a) Der Name *Modulfunktion* stammt von R. DEDEKIND (*Ges. math. Werke I*, 159–172). Eine Modulfunktion tritt zunächst als *Modul* bei elliptischen Integralen in der LEGENDRESchen Normalform auf. Es handelt sich dabei allerdings um eine Funktion, die nicht zur Modulgruppe  $\Gamma$ , sondern zur Hauptkongruenzgruppe  $\Gamma[2]$  gehört (vgl. I.E.2, Korollar I.3.4E, Aufgabe I.4.7). Modulformen treten systematisch zuerst bei WEIERSTRASS in seinen Vorlesungen über elliptische Funktionen als die Invarianten  $g_2$  und  $g_3$  bzw. als  $\Delta$  auf (vgl. I.4.1), nachdem diese vorher von G. EISENSTEIN betrachtet wurden (vgl. I.3.7).

Eigentliche Begründer der Theorie der Modulfunktionen sind F. KLEIN und H. POINCARÉ. Die Hauptwerke von POINCARÉ zu diesem Thema findet man in den ersten Bänden der *Acta Mathematica* (nämlich in Band 1, 3, 4, 5) und in seinen *Œuvres II*. Wichtige Arbeiten von KLEIN findet man in seinen *Ges. math. Abhandlungen III*. Die Theorie wurde dann zunächst von R. FRICKE fortgeführt, von dem der ausführliche Übersichtsartikel II.B4 *Automorphe Funktionen* in der *Enzyklopädie der Math. Wissenschaften* stammt.

b) Auf R. DEDEKIND geht die abkürzende Schreibweise  $1^\tau := e^{2\pi i\tau}$  zurück (*Ges. math. Werke I*, 174–201), die auch später manchmal verwendet wird, sich aber allgemein nicht durchgesetzt hat.

**4. Ganze Modulformen.** Eine Modulform  $f$  vom Gewicht  $k$  heißt eine *ganze Modulform vom Gewicht  $k$* , wenn  $f$  auf  $\mathbb{H}$  holomorph ist und wenn  $f$  bei  $\infty$  keinen Pol hat. Damit ist  $f$  genau dann eine ganze Modulform vom Gewicht  $k$ , wenn gilt:

$$(M.1') \quad f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} \text{ ist holomorph.}$$

$$(M.2') \quad f|_k M = f \text{ für alle } M \in \Gamma.$$

$$(M.3') \quad f \text{ ist für alle } \tau \in \mathbb{H} \text{ mit } \text{Im } \tau \geq \gamma, \gamma > 0, \text{ beschränkt.}$$

Wegen Lemma 2 kann man hier (M.3') ersetzen durch

$$(M.3'') \quad f \text{ besitzt eine FOURIER-Entwicklung der Form}$$

$$f(\tau) = \sum_{m \geq 0} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m \tau},$$

die für  $\gamma > 0$  auf der Menge  $\{\tau \in \mathbb{H} ; \operatorname{Im} \tau \geq \gamma\}$  absolut gleichmäßig konvergiert.

Die Menge  $\mathbb{M}_k$  der ganzen Modulformen von Gewicht  $k$  ist offenbar ein Unterraum des Vektorraums  $\mathbb{V}_k$ .

Eine ganze Modulform  $f$  heißt eine *Spitzenform* (englisch: *cusp form*), wenn  $f$  bei  $\infty$  eine Nullstelle hat, wenn also  $\alpha_f(0) = 0$  gilt. Der Vektorraum der Spitzenformen vom Gewicht  $k$  wird mit  $\mathbb{S}_k$  bezeichnet. Man hat offenbar

$$\mathbb{S}_k \subset \mathbb{M}_k \subset \mathbb{V}_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Aus (M.3'') folgt sofort

$$(1) \quad \alpha_f(0) = \lim_{y \rightarrow \infty} f(iy) \quad \text{für } f \in \mathbb{M}_k.$$

Im Hinblick auf 3(1) erhält man dann

$$(2) \quad \mathbb{M}_k \cdot \mathbb{M}_\ell \subset \mathbb{M}_{k+\ell}, \quad \mathbb{S}_k \cdot \mathbb{M}_\ell \subset \mathbb{S}_{k+\ell} \quad \text{für } k, \ell \in \mathbb{Z}.$$

Wegen seiner Bedeutung wiederholen wir einen Spezialfall von Lemma 2 als

**Lemma.** *Ist  $f \in \mathbb{M}_k$  und  $\gamma > 0$ , so gilt*

$$f(\tau) - \alpha_f(0) = \mathcal{O}(e^{-2\pi \operatorname{Im} \tau})$$

auf der Menge  $\{\tau \in \mathbb{H} ; \operatorname{Im} \tau \geq \gamma\}$ .

Im weiteren Verlauf werden ausschließlich der Körper  $\mathbb{K} = \mathbb{V}_0$  der Modulfunktionen und die Vektorräume  $\mathbb{M}_k$  der ganzen Modulformen vom Gewicht  $k$  studiert.

**5. Negatives Gewicht.** Für  $f \in \mathbb{M}_k$  wird  $\tilde{f} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  erklärt durch

$$(1) \quad \tilde{f}(\tau) := (\operatorname{Im} \tau)^{k/2} \cdot |f(\tau)|, \quad \tau \in \mathbb{H}.$$

Aus II.1.3(1) und 1(1) erhält man offenbar

$$(2) \quad \tilde{f}(M\tau) = \tilde{f}(\tau) \quad \text{für alle } M \in \Gamma,$$

so dass  $\tilde{f}$  eine unter  $\Gamma$  invariante Funktion ist. Die genaue Kenntnis des exakten Fundamentalbereiches  $\mathbb{F}$  aus II.2.2 führt speziell zu der

**Proposition.** *Ist  $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  für  $\operatorname{Im} \tau \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}$  beschränkt und gilt*

$$\varphi(M\tau) = \varphi(\tau) \quad \text{für alle } M \in \Gamma,$$

dann ist  $\varphi$  auf  $\mathbb{H}$  beschränkt.

*Beweis.* Nach II.2.2(3) ist  $\varphi$  speziell im Fundamentalbereich  $\mathbb{F}$  beschränkt. Nun kann man Satz II.2.2a anwenden und sieht, dass  $\varphi$  auf  $\mathbb{H}$  beschränkt ist.  $\square$

Als erstes Strukturergbnis erhalten wir den

**Satz.** Es gilt  $\mathbb{M}_k = \{0\}$  für  $k < 0$ .

*Beweis.* Nach (M.3<sup>v</sup>) ist  $f$  speziell für alle  $\tau$  mit  $\text{Im } \tau \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}$  beschränkt. Da  $k$  negativ ist, gilt dies dann auch für  $\tilde{f}$ . Nun kann man die Proposition auf  $\varphi = \tilde{f}$  anwenden und sieht, dass  $\tilde{f}$  auf  $\mathbb{H}$  beschränkt ist.

Man entwickelt  $f$  in eine FOURIER-Reihe und erhält für die FOURIER-Koeffizienten gemäß 2(4)

$$\alpha_f(m) = e^{2\pi my} \cdot \int_0^1 f(x + iy) \cdot e^{-2\pi imx} dx, \quad m \geq 0.$$

Mit (1) folgt

$$|\alpha_f(m)| \leq y^{-k/2} \cdot e^{2\pi my} \cdot \int_0^1 \tilde{f}(x + iy) dx \leq C \cdot y^{-k/2} \cdot e^{2\pi my}$$

mit einer von  $y$  unabhängigen Konstanten  $C$ . Da die linke Seite ebenfalls nicht von  $y$  abhängt, kann man den Limes  $y \rightarrow 0$  bilden und erhält  $\alpha_f(m) = 0$  für alle  $m \geq 0$ , also  $f \equiv 0$ .  $\square$

**6. Das Wachstum der FOURIER-Koeffizienten.** Für  $f \in \mathbb{M}_k$  wird  $\tilde{f}$  wie in 5(1) erklärt.

**Satz.** Für  $k > 0$  und  $f \in \mathbb{M}_k$  gilt:

a)  $\tilde{f}$  ist genau dann auf  $\mathbb{H}$  beschränkt, wenn  $f \in \mathbb{S}_k$  gilt. In diesem Fall existiert ein  $w \in \mathbb{H}$  mit der Eigenschaft

$$\tilde{f}(\tau) \leq \tilde{f}(w) \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{H}.$$

b) Ist  $f \in \mathbb{S}_k$ , so gilt

$$\alpha_f(m) = \mathcal{O}(m^{k/2}) \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}.$$

*Beweis.* a) Ist  $f$  eine Spitzenform, so ist  $\tilde{f}$  wegen Lemma 4 für  $\text{Im } \tau \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}$  beschränkt. Die Behauptung folgt nun aus Proposition 5. Ist umgekehrt  $\tilde{f}$  beschränkt, so sind wegen Lemma 4 auch  $\alpha_f(0) \cdot y^{k/2}$  in  $\mathbb{F}$  beschränkt. Aus  $k > 0$  folgt  $\alpha_f(0) = 0$ , also  $f \in \mathbb{S}_k$ . Die Existenz von  $w$  ergibt sich aus  $\lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{f}(\tau) = 0$  nach Lemma 4.

b) Man entwickelt  $f$  in eine FOURIER-Reihe und wie im Beweis von Satz 5 folgt

$$|\alpha_f(m)| \leq C \cdot y^{-k/2} \cdot e^{2\pi my} \quad \text{für } y > 0.$$

Da die linke Seite nicht von  $y$  abhängt, darf man rechts  $y = 1/m$ ,  $m > 0$ , eintragen und erhält

$$|\alpha_f(m)| \leq C \cdot e^{2\pi} \cdot m^{k/2},$$

also die Behauptung.  $\square$

**Aufgaben.** Es bezeichne  $A(\mathbb{H})$  die Menge aller modulo 1 periodischen, auf  $\mathbb{H} \cup \{\infty\}$  holomorphen Funktionen  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  mit zugehöriger FOURIER-Reihe der Form

$$f(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi im\tau}, \quad \tau \in \mathbb{H},$$

gemäß Lemma 2.  $A(\mathbb{H})$  ist offenbar eine  $\mathbb{C}$ -Algebra, die alle ganzen Modulformen enthält. Es bezeichne  $B(\mathbb{H})$  die Teilmenge derjenigen  $f \in A(\mathbb{H})$ , zu denen es ein  $\ell \geq 0$  gibt mit der Eigenschaft

$$\alpha_f(m) = \mathcal{O}(m^\ell) \quad \text{für } m \geq 1.$$

Für  $f \in B(\mathbb{H})$  setzt man

$$\kappa(f) := \inf \{ \ell \geq 0 ; \alpha_f(m) = \mathcal{O}(m^\ell) \quad \text{für } m \geq 1 \}.$$

- 1)  $B(\mathbb{H})$  ist eine Unter algebra von  $A(\mathbb{H})$ . Speziell gilt für  $f, g \in B(\mathbb{H})$ :
  - a)  $\kappa(f + g) \leq \max\{\kappa(f), \kappa(g)\}$ ,
  - b)  $\kappa(f \cdot g) \leq \kappa(f) + \kappa(g) + 1$ .
- 2) Ist  $f \in A(\mathbb{H})$  und  $(\operatorname{Im} \tau)^\kappa \cdot f(\tau)$  für ein  $\kappa \geq 0$  auf  $\mathbb{H}$  beschränkt, dann gehört  $f$  zu  $B(\mathbb{H})$  mit  $\kappa(f) \leq \kappa$ .
- 3) Ist  $f \in \mathbb{S}_k$ , so gehört  $f$  zu  $B(\mathbb{H})$  mit  $\kappa(f) \leq k/2$ .
- 4) Ist  $f \in B(\mathbb{H})$ , so konvergiert die DIRICHLET-Reihe

$$D_f(s) := \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_f(m) \cdot m^{-s}$$

für  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > \kappa(f) + 1$  absolut.

- 5) Die Funktion  $f(\tau) = \vartheta(2\tau)$  (vgl. E.3) gehört zu  $B(\mathbb{H})$  mit  $\kappa(f) = 0$  und  $D_f(s) = 2\zeta(2s)$ .
- 6)  $B(\mathbb{H})$  ist eine echte Unter algebra von  $A(\mathbb{H})$ .
- 7) Zu  $f \in \mathbb{M}_k$  definiert man eine Funktion

$$f^* : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \tau \longmapsto \overline{f(-\bar{\tau})}.$$

Dann gilt  $f^* \in \mathbb{M}_k$  und  $f^{**} = f$ . Die FOURIER-Koeffizienten von  $f$  sind genau dann reell, wenn  $f^* = f$ . Die FOURIER-Koeffizienten von  $f$  sind genau dann rein imaginär, wenn  $f^* = -f$ .

- 8)  $\mathbb{M}_k$  besitzt eine Basis aus ganzen Modulformen mit reellen FOURIER-Koeffizienten.
- 9)  $f \in \mathbb{M}_k$  ist genau dann eine Spitzenform, wenn es zu jedem  $\gamma > 0$  positive Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  gibt, so dass

$$|f(\tau)| \leq \alpha \cdot e^{-\beta y} \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{H} \quad \text{mit } y \geq \gamma.$$

- 10) Sei  $f \in \mathbb{M}_k$  und  $\rho = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ . Es gilt  $f(i) = 0$ , falls  $k \not\equiv 0 \pmod{4}$ , und  $f(\rho) = 0$ , falls  $k \not\equiv 0 \pmod{6}$ .

- 11) Für  $f \in \mathbb{S}_k$  und  $r \in \mathbb{Q}$  gilt

$$\lim_{y \downarrow 0} f(r + iy) = 0.$$

Für  $f \in \mathbb{M}_k$ ,  $f \notin \mathbb{S}_k$ ,  $k > 0$  und  $r \in \mathbb{Q}$  gilt

$$\lim_{y \downarrow 0} |f(r + iy)| = \infty.$$

## §2. Beispiele

**1. Die EISENSTEIN-Reihen.** Die klassischen Beispiele für ganze Modulformen sind die EISENSTEIN-Reihen

$$(1) \quad G_k(\tau) := \sum'_{m,n} (m\tau + n)^{-k} \quad \text{für } k \geq 3 \text{ ganz}$$

gemäß I.1.9(2) bzw. I.3.2(1). Dabei soll der Strich am Summenzeichen bedeuten, dass die Summe über alle Paare  $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  mit  $(m, n) \neq (0, 0)$  zu erstrecken ist. Obwohl die wesentlichen Eigenschaften der  $G_k$  bereits in I.§4 hergeleitet wurden, sollen hier einige davon mit anderen Beweisen neu begründet werden:

**Proposition.** *Zu jedem Kompaktum  $\mathcal{K}$  in  $\mathbb{H}$  gibt es positive Konstanten  $\gamma$  und  $\delta$  mit*

$$\gamma \cdot |mi + n| \leq |m\tau + n| \leq \delta \cdot |mi + n|$$

für alle  $m, n \in \mathbb{R}$  und alle  $\tau \in \mathcal{K}$ .

*Beweis.* Aus Homogenitätsgründen darf man  $m^2 + n^2 = 1$ , also  $|mi + n| = 1$  voraussetzen. Dann nimmt aber die stetige Funktion

$$(\tau, m, n) \mapsto |m\tau + n|$$

auf der kompakten Menge  $\mathcal{K} \times \{(m, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} ; m^2 + n^2 = 1\}$  ein Minimum  $\gamma$  und ein Maximum  $\delta$  an. Da  $\text{Im } \tau$  für  $\tau \in \mathcal{K}$  durch eine positive Konstante nach unten beschränkt ist, gilt  $\gamma > 0$ .  $\square$

In Analogie zu I.1.9 erhält man nun das

**Konvergenz-Lemma.** *Für  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k \geq 3$  ist  $G_k$  absolut und kompakt-gleichmäßig konvergent. Damit ist  $G_k$  eine holomorphe Funktion auf  $\mathbb{H}$ .*

*Beweis.* Nach der Proposition braucht nur die Konvergenz von

$$\sum'_{m,n} (m^2 + n^2)^{-\alpha} \quad \text{für } \alpha > 1$$

bewiesen zu werden. Den wohl einfachsten Beweis hierfür findet man bereits bei WEIERSTRASS (*Math. Werke V*, 117): Mit Hilfe der Ungleichung  $m^2 + n^2 \geq |mn|$  erhält man

$$\sum_E (m^2 + n^2)^{-\alpha} \leq 4 \sum_{m \geq 1} m^{-2\alpha} + 4 \left( \sum_{m \geq 1} m^{-\alpha} \right)^2 \leq 4(\zeta(2\alpha) + \zeta^2(\alpha)) < \infty$$

für  $\alpha > 1$  und jede endliche Teilmenge  $E$  von  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \setminus \{(0, 0)\}$ .  $\square$

Eine einfache Konsequenz (vgl. I.4.2(5)) ist das folgende Transformationsverhalten der EISENSTEIN-Reihen.

**Transformations-Lemma.** Für  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k \geq 3$  und alle  $M \in \Gamma$  gilt  $G_k|_k M = G_k$ , d. h.

$$(2) \quad G_k(M\tau) = (c\tau + d)^k \cdot G_k(\tau), \quad \tau \in \mathbb{H}.$$

*Beweis.* Wegen

$$(m \cdot M\tau + n) \cdot (c\tau + d) = m'\tau + n' \quad \text{mit} \quad (m', n') = (m, n) \cdot M$$

durchläuft nach dem Äquivalenz-Satz I.1.5 mit  $(m, n)$  auch  $(m', n')$  alle Paare ganzer Zahlen genau einmal.  $\square$

Mit  $M = -E$  erhält man das

**Korollar A.** Es gilt  $G_k = 0$  für ungerades  $k \geq 3$ .

Aus Kapitel I übernehmen wir den Satz 4.2, dessen Beweis keinen direkten Bezug zur Theorie der elliptischen Funktionen benötigte: Für gerades  $k \geq 4$  gilt

$$(3) \quad G_k(\tau) = 2\zeta(k) + 2 \cdot \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(m) \cdot e^{2\pi i m \tau}.$$

Es ist zweckmäßig, neben der Reihe  $G_k$  auch die *normierte* EISENSTEIN-Reihe

$$(4) \quad G_k^* := \frac{1}{2\zeta(k)} \cdot G_k, \quad k \geq 4 \text{ gerade},$$

zu betrachten. Da jedes Paar ganzer Zahlen  $(m, n) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \setminus \{(0, 0)\}$  sich eindeutig in der Form  $(m, n) = (t\mu, t\nu)$  mit  $t \in \mathbb{N}$  und teilerfremden  $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$  schreiben lässt, hat man auch

$$(4') \quad G_k^*(\tau) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\text{ggT}(m,n)=1} (m\tau + n)^{-k}, \quad k \geq 4 \text{ gerade}.$$

Wir wollen eine weitere Darstellung von  $G_k^*$  herleiten. Dazu sei

$$(5) \quad \Gamma_\infty := \{\pm T^n; n \in \mathbb{Z}\} = \{M \in \Gamma; c = 0\}.$$

„ $M : \Gamma_\infty \setminus \Gamma$ “ bedeutet, dass  $M$  ein Vertretersystem  $\mathcal{V}$  der Rechtsnebenklassen von  $\Gamma$  nach  $\Gamma_\infty$  durchläuft, also

$$\bigcup_{M \in \mathcal{V}} \Gamma_\infty M = \Gamma \quad \text{und} \quad \Gamma_\infty M \neq \Gamma_\infty N \quad \text{für } M, N \in \mathcal{V} \text{ mit } M \neq N.$$

Im Hinblick auf das Ergänzungs-Lemma II.2.1 folgt

$$(6) \quad G_k^*(\tau) = \sum_{M: \Gamma_\infty \setminus \Gamma} 1|_k M(\tau) = \sum_{M: \Gamma_\infty \setminus \Gamma} (c\tau + d)^{-k} \quad \text{für gerades } k \geq 4.$$



Man verwendet nun die EULERSche Formel (vgl. R. REMMERT, G. SCHUMACHER [2002], Satz 11.3.1)

$$(7) \quad 2\zeta(k) = -\frac{(2\pi i)^k}{k!} \cdot B_k, \quad k \geq 2 \text{ gerade,}$$

wobei die ersten BERNOULLI-Zahlen  $B_k$  gegeben sind durch

k	2	4	6	8	10	12	14
$B_k$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$
$-\frac{2k}{B_k}$	-24	240	-504	480	-264	$\frac{65520}{691}$	-24

Aus (3) erhält man dann

$$(9) \quad G_k^*(\tau) = 1 - \frac{2k}{B_k} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(m) \cdot e^{2\pi i m \tau}, \quad k \geq 4 \text{ gerade.}$$

Das bedeutet insbesondere

$$(10) \quad G_4^*(\tau) = 1 + 240 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m) \cdot e^{2\pi i m \tau},$$

$$(11) \quad G_6^*(\tau) = 1 - 504 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_5(m) \cdot e^{2\pi i m \tau}.$$

Nach diesen Vorbereitungen zeigt sich, dass die Vektorräume der ganzen Modulformen für gerades Gewicht  $k \geq 4$  nicht nur aus der Null bestehen:

**Satz.** Für gerades  $k \geq 4$  gilt:

- a)  $G_k \in \mathbb{M}_k$ .
- b)  $\mathbb{M}_k = \mathbb{C} \cdot G_k \oplus \mathbb{S}_k = \mathbb{C} \cdot G_k^* \oplus \mathbb{S}_k$ .

*Beweis.* a) Man verwendet das Konvergenz-Lemma sowie (2) und (3).

b) Für  $f \in \mathbb{M}_k$  ist  $f - \alpha_f(0) \cdot G_k^*$  eine Spitzenform. □

**Korollar B.** Für gerades  $k \geq 4$  und  $f \in \mathbb{M}_k$  gilt

$$(12) \quad \alpha_f(m) = -\alpha_f(0) \cdot \frac{2k}{B_k} \cdot \sigma_{k-1}(m) + \mathcal{O}(m^{k/2}), \quad m \in \mathbb{N}.$$

*Beweis.* Man verwendet Teil b) des Satzes, (9) und Teil b) von Satz 1.6. □

Wegen

$$m^r \leq \sigma_r(m) = \sum_{d|m} d^r = m^r \sum_{d|m} d^{-r} \leq \zeta(r) \cdot m^r$$

für  $r > 1$  folgt speziell

$$(13) \quad \alpha_f(m) = \mathcal{O}(m^{k-1}) \quad \text{für alle } f \in \mathbb{M}_k, k \geq 4 \text{ gerade,}$$

und diese Abschätzung kann für  $f \notin \mathbb{S}_k$  nicht verbessert werden.

Bei den EISENSTEIN-Reihen treten gewisse *Zwangsnullstellen* auf:

**Nullstellen-Lemma.** a) *Es gilt  $G_k(i) = 0$  für  $k \not\equiv 0 \pmod{4}$ , speziell hat man  $G_6(i) = 0$ .*

b) *Es gilt  $G_k(\rho) = 0$  für  $k \not\equiv 0 \pmod{6}$ , speziell  $G_4(\rho) = 0$ ,  $\rho := \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ .*

*Beweis.* Es gilt  $i(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}$  und  $\rho(\mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}$  wegen  $\rho^2 = \rho - 1$ . Aufgrund der absoluten Konvergenz der Reihen (1) hat man daher  $G_k(i) = i^{-k} \cdot G_k(i)$  und analog auch  $G_k(\rho) = \rho^{-k} \cdot G_k(\rho)$ .  $\square$

**Bemerkung.** Man kann die Lage der Nullstellen etwas genauer beschreiben. Nach einem Resultat von F.K.C. RANKIN und H.P.F. SWINNERTON-DYER (Bull. Lond. Math. Soc. **2**, 169–170 (1970)) liegen für gerades  $k > 2$  die Nullstellen von  $G_k$  in  $\mathbb{F}$  auf dem Einheitskreis. Man vergleiche dazu auch B. SCHÖNEBERG [1974], III.1.6.

**2. Die Diskriminante  $\Delta$**  wurde bereits in I.3.4(7) eingeführt und in I.4.3 ausführlicher behandelt. Nach I.4.3(1) ist sie durch

$$(1) \quad \Delta := (60G_4)^3 - 27(140G_6)^2$$

definiert. Das Transformations-Lemma 1 ergibt sofort

$$(2) \quad \Delta(M\tau) = (c\tau + d)^{12} \cdot \Delta(\tau) \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{H} \quad \text{und} \quad M \in \Gamma$$

und der Satz I.4.3 zeigt, dass  $\Delta$  eine FOURIER-Entwicklung der Form

$$(3) \quad \Delta(\tau) = (2\pi)^{12} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) \cdot e^{2\pi im\tau}, \quad \tau \in \mathbb{H},$$

besitzt, bei der alle Koeffizienten  $\tau(m)$  ganze Zahlen sind und  $\tau(1) = 1$  gilt. Eine kurze Tabelle der  $\tau(m)$  hatten wir in I.4.3(6) notiert.

Aus (1), (2) und (3) erhält man den wichtigen

**Satz.** *Es gilt  $\Delta \in \mathbb{S}_{12}$ .*

Als wichtigste Anwendung der Theorie der elliptischen Funktionen vermerken wir die Nullstellenfreiheit von  $\Delta$  nach Korollar I.3.4C sowie die Produktentwicklung nach I.6.5(1). Wir werden diese Tatsachen hier (noch) nicht verwenden, sondern in Satz 4.1 und Korollar 6.2 neue Beweise geben.

Auch hier ist es zweckmäßig, eine normierte Version gesondert zu bezeichnen. Im Hinblick auf (3) definiert man die *normierte Diskriminante* durch

$$(4) \quad \Delta^*(\tau) := (2\pi)^{-12} \cdot \Delta(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) \cdot e^{2\pi im\tau}, \quad \tau \in \mathbb{H}.$$