

Since

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x^2/4t} dx &= 2^{s-1} t^{s/2} \int_0^\infty e^{-w} w^{s/(2-1)} dw \\ &= 2^{s-1} t^{s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right), \end{aligned} \quad (23.3)$$

using a simple change of variable, we end up with the result

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x) x^{s-1} dx &= 2^{s-1} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \int_0^\infty e^{-t} t^{(s/2-1/2)} dt \\ &= 2^{s-1} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \quad (23.4)$$

The duplication formula for the gamma function

$$\sqrt{\pi} \Gamma(s) = 2^{s-1} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{2}\right) \quad (23.5)$$

shows the equality of the Mellin transforms of  $f(x)$  and the function  $\sqrt{\pi}e^{-x}$ , invoking standard uniqueness theorems. Hence

$$\sqrt{\pi} e^{-x} = \int_0^\infty e^{-t-(x^2/4t)} \frac{dt}{\sqrt{t}}. \quad (23.6)$$

Alternatively, we can use this formula to derive the duplication formula.

### *Comments and References*

For the duplication formula, see Whittaker and Watson, p. 240. The above result is due to Legendre. The general result

$$(2\pi)^{(n-1)/2} n^{(1/2)-nz} \Gamma(nz) = \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(z + \frac{2}{n}\right) \dots \Gamma\left(z + \frac{n-1}{n}\right)$$

is due to Gauss. Using this formula, we can obtain a representation of the form

$$\begin{aligned} \exp(-x^{1/n}) &= k_n \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1}) - x}{t_1 t_2 \dots t_{n-1}}\right) \\ &\quad \times t_1^{a_1} t_2^{a_2} \dots t_{n-1}^{a_{n-1}} dt_1 \dots dt_{n-1} \end{aligned}$$

for suitable choice of the exponents  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ , where  $k_n$  is a constant independent of  $x$ . We leave this to the reader.

## 24. The Riemann Zeta Function

Let us now pursue an apparently tangential path. We wish to consider one of the most fascinating and glamorous functions of analysis, the Riemann zeta

function. The connection between this function and theta functions was extensively discussed by Riemann.

This function,  $\zeta(s)$ , is defined for  $Re(s) > 1$  by the simplest of Dirichlet series, the series

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \quad (24.1)$$

Clearly, this defines an analytic function for  $Re(s) > 1$ . Since the most interesting properties of  $\zeta(s)$  are tied to the region  $0 \leq Re(s) \leq 1$ , let us examine the question of analytic continuation. We shall follow a trail blazed by Riemann, leading from the theta function to the zeta function.

Consider the function

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi t}, \quad (24.2)$$

whose Mellin transform is readily obtained. For  $Re(s) > \frac{1}{2}$ , we have

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} g(t) t^{s-1} dt &= \int_0^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi t} \right) t^{s-1} dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}\pi^s} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt \\ &= \frac{\Gamma(s)}{\pi^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}}. \end{aligned} \quad (24.3)$$

(The condition  $Re(s) > \frac{1}{2}$  arises in two ways, one is to ensure the convergence of the integral and the other is to ensure the convergence of the series.)

We thus obtain an important representation

$$\frac{\Gamma(s/2)\zeta(s)}{\pi^{s/2}} = \int_0^{\infty} t^{(s/2)-1} \left( \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi t} \right) dt, \quad (24.4)$$

valid for  $Re(s) > \frac{1}{2}$ . To obtain the analytic continuation of  $\zeta(s)$  we shall use the functional equation of the theta function.

Write

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) \pi^{-s/2} = \int_0^{\infty} t^{(s/2)-1} g(t) dt = \int_0^1 + \int_1^{\infty}. \quad (24.5)$$

In the interval  $[0,1]$ , let us replace  $g(t)$  by its equivalent obtained from the transformation formula,

$$g(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} t^{-1/2} + t^{-1/2} g\left(\frac{1}{t}\right), \quad (24.6)$$

(a result obtained first in Section 9).

Then

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(s/2) \zeta(s)}{\pi^{s/2}} &= \int_0^1 \left( -\frac{1}{2} + \frac{t^{-1/2}}{2} \right) t^{(s/2)-1} dt + \int_0^1 g\left(\frac{1}{t}\right) t^{(s/2)-(3/2)} dt \\ &\quad + \int_1^\infty t^{(s/2)-1} g(t) dt. \end{aligned} \quad (24.7)$$

In the second integral, make the change of variable  $t' = 1/t$ . Evaluating the first integral, we obtain finally

$$\frac{\Gamma(s/2) \zeta(s)}{\pi^{s/2}} = \left( \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} \right) + \int_1^\infty [t^{s/2} + t^{(1-s)/2}] g(t) \frac{dt}{t}. \quad (24.8)$$

Since  $|g(t)| = 0$  ( $e^{-\pi t}$ ) as  $t \rightarrow \infty$ , we see that the integral is an entire function of  $s$ .

It follows that  $\Gamma(s/2) \zeta(s)$  is analytic except at the points  $s = 0$  and  $s = 1$ , where it possesses simple poles. Since  $\Gamma(s/2)$  has a simple pole at  $s = 0$ , we see that  $\zeta(s)$  is analytic over the entire  $s$  plane, except at  $s = 1$ , where it possesses a simple pole. Since  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ , we see that

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \dots \quad (24.9)$$

in the neighborhood of  $s = 1$ , a result we shall use below.

We have thus solved the problem of the analytic continuation of  $\zeta(s)$  over the entire  $s$  plane. We can, however, obtain much more from the identity of 24.8. Observe that the expression on the right-hand side of 24.8 is invariant under the change of variable  $s' = 1 - s$ .

It follows that we have the remarkable functional equation

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-s/2} \zeta(s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \pi^{-(1-s)/2} \zeta(1-s) \quad (24.10)$$

for  $s \neq 0$  or  $1$ .

### ***Comments and References***

This was the second method used by Riemann to derive the functional equation. See

Riemann, B., "Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse." *Werke*, 2, pp. 145-153, 1892. (Collected Works of Bernhard Riemann, Dover, 1953).

## 25. An Alternate Form of the Functional Equation

The duplication formula for the gamma function, a result we have already encountered, permits us to write the functional equation in the form

$$\zeta(s) = \frac{2^{s-1} \pi^s \zeta(1-s)}{\Gamma(s) \cos(\pi s/2)}. \quad (25.1)$$

To obtain this from 24.10, we must also use the formula

$$\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi(1-s)}{2}\right)}.$$

This is occasionally a more convenient expression to employ.

## 26. The Riemann Hypothesis

The functional equation of 24.10 shows that the function  $\Gamma(s/2)\pi^{-s/2} \zeta(s)$  is symmetric about  $s = \frac{1}{2}$ . Consequently, it is to be expected that this line will play an important role in the theory of the zeta function. On the basis of the functional equation and an asymptotic formula derived in a way we shall subsequently discuss, Riemann conjectured that all of the zeroes of  $\Gamma(s/2) \zeta(s)$  were on the line  $s = \frac{1}{2} + it$ .

Despite the apparent simplicity of the function, this statement has never been confirmed or refuted. As a result of the concentrated effort of a number of mathematicians—Hadamard, De La Vallee Poussin, Gronwall, Landau, Hardy, Littlewood, Ingham, Titchmarsh, and Selberg—a great deal has been learned about the distribution of the zeroes of  $\zeta(s)$ . The calculations of digital computers based upon various formulas confirm the hypothesis as far as they go. Nevertheless, the Riemann hypothesis remains one of the outstanding challenges of mathematics, a prize which has tantalized and eluded some of the most brilliant mathematicians of this century.

The Euler factorization

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad \text{Re}(s) > 1, \quad (26.1)$$

where the product is taken over the primes  $p = 2, 3, 5, \dots$ , shows the intimate connection between the analytic properties of  $\zeta(s)$  and the distribution of primes. It is an analytic expression of the result of Euclid concerning unique factorization. Although it can be deduced from this expression that  $\zeta(s) \neq 0$  for  $\text{Re}(s) > 1$ , further results, meager as they are, are obtained only at great effort.

# Kapitel III.

## Modulformen

### Einleitung

**1. Vorbemerkung.** Wie die elliptischen Funktionen unter gewissen Selbstabbildungen von  $\mathbb{C}$ , nämlich den Translationen eines Gitters, in sich übergehen, so sind die *Modulfunktionen* unter geeigneten Selbstabbildungen der oberen Halbebene  $\mathbb{H}$ , nämlich den *Modulsubstitutionen*

$$\tau \longmapsto M\tau := \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad \text{mit} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma := SL(2; \mathbb{Z})$$

invariant. Das wichtigste Beispiel einer solchen Funktion, die überdies auf  $\mathbb{H}$  holomorph ist, ist die *absolute Invariante*  $j = j(\tau)$ , die wir bereits in I.4.4 und in II.E.3 kennen gelernt haben. Es wird sich herausstellen, dass man mit  $j$  alle Modulfunktionen beschreiben kann.

**2. Mögliches Transformationsverhalten.** Neben Funktionen, die unter den Modulsubstitutionen invariant bleiben, sind aber auch Funktionen  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  von Interesse, die unter den Modulsubstitutionen wenigstens noch ein übersichtliches Verhalten aufweisen:

$$(1) \quad f(M\tau) = \gamma_M(\tau) \cdot f(\tau) \quad \text{für alle} \quad M \in \Gamma.$$

Dabei sei  $\gamma_M(\tau)$  ein „elementarer“ Faktor, der noch genauer festgelegt werden muss. Schreibt man (1) für  $MN$  anstelle von  $M$  und verwendet  $(MN)\tau = M(N\tau)$ , so erhält man (im Fall  $f(\tau) \neq 0$ ) die Bedingung

$$(2) \quad \gamma_{MN}(\tau) = \gamma_M(N\tau) \cdot \gamma_N(\tau) \quad \text{für} \quad M, N \in \Gamma \quad \text{und} \quad \tau \in \mathbb{H}$$

an  $\gamma$ . Diese „Cozykel-Bedingung“ hat Ähnlichkeit mit der Kettenregel der Differentiation. In der Tat erfüllen

$$(3) \quad \gamma_M(\tau) := \frac{dM\tau}{d\tau} = (c\tau + d)^{-2}$$

und jede Potenz davon (2). Die auf diese Weise für jede gerade Zahl  $k$  entstehende Transformationsformel

$$(4) \quad f(M\tau) = (c\tau + d)^k \cdot f(\tau) \quad \text{für } M \in \Gamma$$

ist dann charakteristisch für die so genannten *Modulformen*. Da die Gruppe der Modulsstitutionen gemäß Korollar II.2.1A durch die Abbildungen

$$(5) \quad \tau \longmapsto \tau + 1 \quad \text{und} \quad \tau \longmapsto -1/\tau$$

erzeugt wird, kann man (4) durch die beiden Bedingungen

$$(6) \quad f(\tau + 1) = f(\tau) \quad \text{und} \quad f(-1/\tau) = \tau^k \cdot f(\tau)$$

ersetzen.

In I.4.1 hatten wir gesehen, dass die EISENSTEIN-Reihen  $G_k$  Beispiele von solchen Funktionen sind. Es soll noch ein weiteres Beispiel skizziert werden, das ein zu (6) analoges Transformationsverhalten besitzt:

**3. Die klassische Theta-Reihe.** In seinen Briefen an GOLDBACH vom 4. 5. 1748 und 17. 8. 1750 behandelt L. EULER im Reellen bereits die *Theta-Reihe*

$$(1) \quad \vartheta(\tau) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau} = 1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \quad \text{mit } q := e^{\pi i \tau} \quad \text{und } \tau \in \mathbb{H}.$$

Im Zusammenhang mit der Wärmeleitungsgleichung tritt die Theta-Reihe dann bei J. FOURIER in *Théorie Analytique de la Chaleur* (Paris 1822) auf (vgl. I.6.7). Im Nachlass von C.F. GAUSS (*Werke III*, 436–445) fand man eine Note etwa aus dem Jahre 1808, in der eine etwas allgemeinere Reihe (nämlich die in I.6.7(1) definierte JACOBISCHE Theta-Reihe  $\vartheta(z; \tau)$ ) betrachtet und für sie bereits eine Transformationsformel bewiesen wird. In den *Fundamenta nova* wird dann von C.G.J. JACOBI (*Ges. Werke I*, 198–239) die allgemeine Reihe

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2} \cos(2nx)$$

unter dem Buchstaben  $\Theta$  eingeführt und zur Darstellung der elliptischen Funktionen verwendet. In der Bezeichnung von I.6.7 ist  $\vartheta(\tau)$  gleich dem *Nullwert*  $\vartheta(0; \tau)$ .

Offenbar ist  $\vartheta(\tau)$  absolut und kompakt-gleichmäßig konvergent auf  $\mathbb{H}$ , so dass  $\vartheta : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ist. Es gilt darüber hinaus

$$(2) \quad \vartheta(\tau + 2) = \vartheta(\tau) \quad \text{für } \tau \in \mathbb{H}.$$

Die Bedeutung und das Interesse, das die Theta-Reihe immer wieder gefunden hat, liegen nun in der so genannten

**Theta-Transformationsformel:**

$$(3) \quad \vartheta(-1/\tau) = \sqrt{\tau/i} \cdot \vartheta(\tau) \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{H}.$$

Dabei ist der Zweig der Wurzel zu wählen, der für positive Argumente selbst positiv ist.

*Beweis.* Man wendet die so genannte POISSONSche Summationsformel auf  $\vartheta(iy)$ ,  $y > 0$ , an oder – was auf dasselbe hinausläuft – entwickelt die modulo 1 periodische, stetig differenzierbare Funktion

$$\varphi(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi(n+t)^2 y}, \quad t \in \mathbb{R},$$

in eine FOURIER-Reihe und erhält

$$\begin{aligned} \vartheta(iy) &= \varphi(0) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m, \\ \alpha_m &:= \int_0^1 \varphi(t) \cdot e^{-2\pi i m t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2 y} \cdot e^{-2\pi i m t} dt. \end{aligned}$$

Hier ist

$$\alpha_m = \beta_m(y) \cdot e^{-\pi m^2 / y} \quad \text{mit} \quad \beta_m(y) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(t\sqrt{y} + im/\sqrt{y})^2} dt = \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \beta_{m/\sqrt{y}}(1).$$

Nach dem CAUCHYSchen Integralsatz hängt  $\beta_m(1) = \beta$  nicht von  $m$  ab (vgl. R. REMMERT, G. SCHUMACHER [2002], 12.4.3) und man erhält

$$\vartheta(iy) = \frac{\beta}{\sqrt{y}} \cdot \vartheta\left(\frac{i}{y}\right) \quad \text{für } y > 0.$$

Setzt man nun  $y = 1$ , so folgt  $\beta = 1$  wegen  $\vartheta(iy) > 0$ . Die Transformationsformel ergibt sich nun durch analytische Fortsetzung.  $\square$

Einen elementaren Beweis der POISSONSchen Summationsformel findet man z.B. bei M. KOECHER [1987], 179–181.

Betrachtet man jetzt  $f(\tau) := \vartheta^8(\tau)$ , so erhält man in Analogie zu 2(6)

$$(4) \quad f(\tau + 2) = f(\tau) \quad \text{und} \quad f(-1/\tau) = \tau^4 \cdot f(\tau).$$

Damit kennt man das Transformationsverhalten von  $f = \vartheta^8$  unter der von den Modulsstitutionen  $\tau \mapsto \tau + 2$  und  $\tau \mapsto -1/\tau$  erzeugten Gruppe von Automorphismen von  $\mathbb{H}$ . Mit der *Theta-Gruppe*  $\Gamma_\vartheta$  in II.3.4 folgt

$$f(M\tau) = (c\tau + d)^4 \cdot f(\tau) \quad \text{für alle } M \in \Gamma_\vartheta.$$

Ein anderer – ebenfalls durch II.3.4 nahegelegter – Ansatz liefert eine Funktion, bei der man das Transformationsverhalten unter allen Modulsstitutionen kennt: Man setzt

$$(5) \quad g(\tau) := \frac{1}{\tau} \cdot \vartheta^2(\tau) \cdot \vartheta^2(\tau + 1) \cdot \vartheta^2(1 - 1/\tau)$$

und verifiziert mit (2) und (3)

$$g(\tau + 1) = i \cdot g(\tau) \quad \text{und} \quad g(-1/\tau) = i \cdot \tau^3 \cdot g(\tau).$$

Die vierte Potenz von  $g$  ist daher eine Modulform im Sinne von 2(6) zu  $k = 12$ . Man vergleiche Satz 4.5 d).