MODULFORMEN ([1], S. 109–110, 113, 126–127, 152–158)

In seinem letzten Brief an Hardy gab Ramanujan 17 Funktionen an, die er *Mock-Theta-Funktionen* nannte. Ramanujan hielt diese Funktionen für ebenso bedeutend wie die klassischen Modulformen. Führen Sie in Ihrem Vortrag den Begriff der Modulform ein. Im weiteren Verlauf des Seminares werden wir Modulformen mit Mock-Theta-Funktionen vergleichen.

Wir betrachten die Operation von

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ ad - bc = 1 \right\}$$

auf der oberen Halbebene $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ durch Möbiustransformationen

$$\tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Definieren Sie die Strich-Operatoren $|_k$, $k \in \mathbb{Z}$ und zeigen Sie (für $M_1, M_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$):

$$\left(f\big|_k M_1\right)\big|_k M_2 = f\big|_k (M_1 M_2).$$

Führen Sie anschließend den Vektorraum M_k der Modulformen vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ sowie den Raum $S_k \subset M_k$ der *Spitzenformen* vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ ein. Zeigen Sie, dass $M_k = \{0\}$ gilt, falls k ungerade ist.

Folgern Sie aus der Definition, dass eine Modulform eine Fourier-Reihen-Entwicklung hat und geben Sie die Integraldarstellung für die Fourierkoeffizienten $a_f(n)$ ($n \in \mathbb{N}$) an. Zeigen Sie, dass $M_k = \{0\}$ gilt, falls k negativ ist. Schätzen Sie schließlich die Fourierkoeffizienten von Spitzenformen wie folgt ab:

Satz 1. *Es sei $f \in S_k$. Dann gibt es eine Konstante $C_f > 0$, so dass für alle $n \geq 1$ gilt:*

$$|a_f(n)| \leq C_f n^{\frac{k}{2}}.$$

Hierzu definieren wir

$$\widetilde{f}(\tau) = \mathrm{Im}(\tau)^{\frac{k}{2}} |f(\tau)|.$$

Beweisen Sie zunächst folgendes Lemma:

Lemma 2. *Es sei $f \in S_k$. Dann existiert eine Konstante $C_f > 0$, so dass für jedes $\tau \in \mathbb{H}$ die Ungleichung $|\widetilde{f}(\tau)| \leq C_f$ gilt.*

Um Lemma 2 herzuleiten, können Sie ohne Beweis folgende Tatsache benutzen: Für jedes $\tau \in \mathbb{H}$ gibt es eine Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit

$$-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) \leq \frac{1}{2},$$

$$\left|\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right| \geq 1.$$

Zeigen Sie, dass für $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt:

$$\widetilde{f}\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \widetilde{f}(\tau).$$

Beweisen Sie nun, dass $\widetilde{f}$ auf

$$\left\{ \tau \in \mathbb{H} \;\middle|\; -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(\tau) \leq \frac{1}{2}, \mathrm{Im}(\tau) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

beschränkt ist. Daraus folgt Lemma 2.

Literatur

[1] M. Koecher und A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer-Verlag, Berlin, 1998, 1–331.