EINE MOCK-MODULFUNKTION VON RAMANUJAN ([1], S. 12-15, 41-43)

Ramanujan untersuchte die Funktion ($\tau \in \mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$, $q = e^{2\pi i\tau}$)

$$\mu(\tau) = 1 + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n q^{\frac{n^2}{2}} \left(1 - q^{\frac{1}{2}}\right)\left(1 - q^{\frac{3}{2}}\right)\cdots\left(1 - q^{\frac{2n-1}{2}}\right)}{(1+q)^2\,(1+q^2)^2\cdots(1+q^n)^2}.$$

Hieran angelehnt definierte Andrews ([1],S. 11, Gleichung (1.8))

$$\beta(\tau) = \frac{1}{1 - q^{\frac{1}{2}}} + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{q^{\frac{n^2+n}{2}}\,(1+q)\cdots(1+q^n)}{(1-q)\cdots(1-q^n)\left(1-q^{\frac{1}{2}}\right)^2\cdots\left(1-q^{\frac{2n+1}{2}}\right)^2}.$$

Offensichtlich gilt $\mu(\tau+2) = \mu(\tau)$ und $\beta(\tau+2) = \beta(\tau)$. Analog zu der Symmetrie der klassischen Modulformen bezüglich der modularen Transformation $\tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$ zeigte Andrews, dass die Funktionen μ und β folgende Funktionalgleichung erfüllen:

(1) $$q^{-\frac{1}{16}}\sqrt{\frac{i}{2\tau}}\mu(\tau) = \frac{i}{\tau}e^{-\frac{\pi i}{2\tau}}\beta\left(-\frac{1}{\tau}\right) + 2\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{8\pi i x^2\tau}}{e^{-2\pi i x\tau} + e^{2\pi i x\tau}}dx.$$

Um diese Funktionalgleichung zu beweisen, definieren wir

(2) $$\begin{aligned} M_1(\tau) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{q^{4n^2+n}}{1+q^{2n}} + q^{\frac{3}{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{q^{4n^2+5n}}{1+q^{2n+1}}, \\ M_3(\tau) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n q^{n^2+n}}{1-q^{2n+1}} + q^{\frac{1}{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n q^{n^2+2n}}{1-q^{2n+1}}, \\ \vartheta_4(\tau) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{n^2}{2}}. \end{aligned}$$

Andrews leitete folgende Funktionalgleichung zwischen M_1 und M_3 her.

Satz 1. *Für $\tau \in \mathbb{H}$ gilt*

$$M_1(\tau) = \frac{i}{\tau}e^{-\frac{\pi i}{2\tau}} M_3\left(-\frac{1}{\tau}\right) + 2\vartheta_4\left(-\frac{2}{\tau}\right)\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{8\pi i x^2\tau}}{e^{-2\pi i x\tau} + e^{2\pi i x\tau}}dx.$$

Beweisen Sie Satz 1 (s. Anhang sowie [1], S. 12-15) und leiten Sie schließlich die Funktionalgleichung (1) her. Benutzen Sie hierzu ohne Beweis die Identitäten (siehe [2], S. 100 und [1], S. 27, 28, 41 – 43 für einen Beweis)

$$\begin{aligned} M_1(\tau) &= \sqrt{\frac{i}{2\tau}} q^{-\frac{1}{16}} \vartheta_4\left(-\frac{2}{\tau}\right)\mu(\tau), \\ M_3(\tau) &= \vartheta_4(2\tau)\,\beta(\tau). \end{aligned}$$

Literatur

[1] G.E. Andrews, The Mordell integrals and Ramanujan's "lost"notebook, Lecture Notes in Mathematics 899, Springer-Verlag, NY, S. 10-48.

[2] L.J. Slater, Generalized Hypergeometric Functions, Cambridge University Press, London, 1966.

Beweis von Satz 1 (s. [1], S. 12-15)

Der Beweis von Satz 1 beruht auf der *Poissonschen Summenformel*. Zu einer integrierbaren Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $\widehat{F}$ die Fouriertransformierte

$$\widehat{F}(y) = \int_{\mathbb{R}} F(x) e^{-2\pi i x y} dx.$$

Satz 2 (Poissonsche Summenformel)**.** *Es sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zweimal stetig differenzierbar und $C \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$|F(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}.$$

Dann gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} F(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{F}(m).$$

Wir wenden die Poissonsche Summenformel auf die beiden Summen in (2) an. Für die erste Summe erhalten wir

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{q^{4n^2+n}}{1+q^{2n}} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{8\pi i x^2 \tau - 2\pi i m x}}{e^{-2\pi i x \tau} + e^{2\pi i x \tau}} dx = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi i \left(4x^2\tau - mx\right)}}{e^{-2\pi i x \tau} + e^{2\pi i x \tau}} dx = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} f_m(x) dx.$$

Um die Variablen m und x in dem Integral zu trennen, verschieben wir den Integrationsweg nach $\mathbb{R} + x_m$, wobei

$$x_m = \frac{m}{8\tau}$$

die Nullstelle der Ableitung von $4\tau x^2 - mx$ ist. Die Singularitäten des Integranden $f_m(x)$ liegen bei $\rho_\ell = \frac{4\ell+2}{8\tau}$ ($\ell \in \mathbb{Z}$). Definieren Sie zunächst der Cauchyscher Hauptwert des Kurvenintegrals (entlang eine Kurve $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$)

$$\mathrm{CH} \int_{\mathcal{C}} f(x) dx.$$

Der Residuensatz besagt nun ($\lambda_{m,\ell} = \mathrm{Res}_{\rho_\ell}(f_m)$):

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} f_m(x) dx = \underbrace{\sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathrm{CH} \int_{\mathbb{R}+x_m} f_m(x) dx}_{I} + \underbrace{2\pi i \sum_{\substack{m<0 \\ \frac{m-2}{4} \leq \ell \leq -1}}^{\star} \lambda_{m,\ell} - 2\pi i \sum_{\substack{m\geq 0 \\ 0 \leq \ell \leq \frac{m-2}{4}}}^{*} \lambda_{m,\ell}}_{R}.$$

In der Summe $\sum^{\star} \lambda_{m,\ell}$ wird hierbei der Summand $\lambda_{m,\ell}$ für $\ell = \frac{m-2}{4}$ mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ gewichtet. Es gilt

$$\lambda_{4\ell+2+\nu,\ell} = \lambda_{4\ell+2,\ell} e^{-2\pi i \rho_\ell \nu}.$$

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} \frac{R}{2\pi i} &= \sum_{\ell\leq -1} \lambda_{4\ell+2,\ell} \left(-\frac{1}{2} + \sum_{\nu\leq 0} e^{2\pi i \rho_\ell \nu} \right) - \sum_{\ell\geq 0} \lambda_{4\ell+2,\ell} \left(-\frac{1}{2} + \sum_{\nu\geq 0} e^{-2\pi i \rho_\ell \nu} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{1+e^{2\pi i \rho_\ell}}{1-e^{2\pi i \rho_\ell}} \lambda_{4\ell+2,\ell} = \frac{1}{2} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{1+e^{-\frac{2\pi i}{\tau}\left(\frac{2\ell+1}{4}\right)}}{1-e^{-\frac{2\pi i}{\tau}\left(\frac{2\ell+1}{4}\right)}} \frac{(-1)^\ell}{4\pi\tau} e^{-\frac{2\pi i}{\tau}\left(\frac{(2\ell+1)^2}{4}\right)}. \end{aligned}$$

Weiter berechnen wir ($\zeta = e^{\frac{\pi i}{4}}$, $q_1 = e^{-\frac{2\pi i}{\tau}}$)

$$\mathrm{CH}\int_{\mathbb{R}+x_m} f_m(x)dx \overset{y=x-x_m}{=} q_1^{\frac{m^2}{16}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{8\pi i y^2 \tau}}{\zeta^{-m}e^{-2\pi i y\tau} + \zeta^m e^{2\pi i y \tau}} dy.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{q^{4n^2+n}}{1+q^{2n}} = \underbrace{\sum_{m\in\mathbb{Z}} q_1^{\frac{m^2}{16}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{8\pi i y^2 \tau}}{\zeta^{-m}e^{-2\pi i y\tau} + \zeta^m e^{2\pi i y \tau}} dy}_{=I} + \underbrace{\frac{i}{4\tau} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{1+q_1^{\frac{2\ell+1}{4}}}{1-q_1^{\frac{2\ell+1}{4}}} (-1)^\ell \, q_1^{\frac{(2\ell+1)^2}{4}}}_{=R}.$$

Eine ähnliche Rechnung mit $x'_m = \frac{m-4\tau}{8\tau} = x_m - \frac{1}{2}$ liefert

$$q^{\frac{3}{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{q^{4n^2+5n}}{1+q^{2n+1}} = \underbrace{\sum_{m\in\mathbb{Z}} (-1)^m q_1^{\frac{m^2}{16}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{8\pi i y^2 \tau}}{\zeta^{-m}e^{-2\pi i y\tau} + \zeta^m e^{2\pi i y \tau}} dy}_{I'} + \underbrace{\frac{i}{4\tau} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{1-q_1^{\frac{2\ell+1}{4}}}{1+q_1^{\frac{2\ell+1}{4}}} (-1)^\ell \, q_1^{\frac{(2\ell+1)^2}{4}}}_{R'}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} R+R' &= \frac{i}{2\tau} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{1+q_1^{\frac{2\ell+1}{2}}}{1-q_1^{\frac{2\ell+1}{2}}} (-1)^\ell \, q_1^{\frac{(2\ell+1)^2}{4}} = \frac{i}{2\tau} q_1^{\frac{1}{4}} \left(\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^\ell q_1^{\ell^2+\ell}}{1-q_1^{\frac{2\ell+1}{2}}} - \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^j q_1^{j^2+j}}{1-q_1^{-\frac{2j+1}{2}}} \right) \\ &\overset{\ell=-j-1}{=} \frac{i}{\tau} q_1^{\frac{1}{4}} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^\ell q_1^{\ell^2+\ell}}{1-q_1^{\frac{2\ell+1}{2}}} = \frac{i}{\tau} q_1^{\frac{1}{4}} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^\ell q_1^{\ell^2+\ell}}{1-q_1^{2\ell+1}} \left(1+q_1^{\frac{2\ell+1}{2}}\right) = \frac{i}{\tau} q_1^{\frac{1}{4}} M_3(q_1), \\ I+I' &\overset{m=2j}{=} 2\sum_{j\in\mathbb{Z}} (-i)^j q_1^{\frac{j^2}{4}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{8\pi i y^2\tau}}{(-1)^j e^{-2\pi i y \tau} + e^{2\pi i y\tau}} dy \overset{j=2\ell}{=} 2\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} (-1)^\ell q_1^{\ell^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{8\pi i y^2 \tau}}{e^{-2\pi i y\tau} + e^{2\pi i y \tau}} dy. \end{aligned}$$

Literatur

[1] G.E. Andrews, The Mordell integrals and Ramanujan's "lost" notebook, Lecture Notes in Mathematics 899, Springer-Verlag, NY, 1981, 10–48.