MOCK-THETA-FUNKTIONEN, INDEFINITE THETAREIHEN UND LERCHSCHE SUMMEN ([1], S. 114–123, 126, [2], S. 7–8)

In diesem Vortrag sollen Sie eine der Mock-Theta-Funktionen als Produkt einer Modulform mit einer sogenannten *indefiniten Thetareihen* darstellen. Wir betrachten die Mock-Theta-Funktion $\left(\tau \in \mathbb{H} = \left\{\tau \in \mathbb{C} \middle| \operatorname{Im}(\tau) > 0\right\},\ q = e^{2\pi i\tau}\right)$

$$f_0(\tau) = 1 + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{q^{n^2}}{(1+q)\,(1+q^2)\cdots(1+q^n)}.$$

Ziel des Vortrages ist:

Satz 1. *Die Funktion f_0 besitzt die Darstellung*

$$f_0(\tau) = \frac{1}{\prod_{m\in\mathbb{N}}(1-q^m)} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{-n\le j\le n} (-1)^j q^{\frac{5}{2}n^2+\frac{1}{2}n-j^2}\left(1-q^{4n+2}\right). \tag{1}$$

Hierin ist das Produkt $\prod_{n\in\mathbb{N}}(1-q^n)^{-1}$ im Wesentlichen eine Modulform und die Summe in (1) ist eine sogenannte indefinite Thetareihe. Eine indefinite Thetareihe kann mittels der sogenannten „*Methode der konstanten Terme*“ als *Lerchsche Summe* geschrieben werden: $\big(a, b, \in \mathbb{Q},\ c \in \mathbb{C}\big)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{an^2+bn}}{1-cq^n}.$$

Die Transformationseigenschaften von Lerchschen Summen sind aus Zwegers’ Dissertation [2] bekannt. Sie brauchen in Ihrem Vortrag aber nicht auf Lerchsche Summen oder die Methode der konstanten Terme einzugehen.

In dem Beweis von Satz 1 verwenden wir die Theorie der *Bailey-Paare*. Definieren Sie, was ein Bailey-Paar ist. Formulieren Sie dann (ohne Beweis) das Baileysche Lemma, welches aus einem gegebenen Bailey-Paar neue Bailey-Paare konstruiert. Wir wenden das Lemma auf das folgende Bailey-Paar (α_n, β_n) an:

$$\beta_n = \frac{1}{(1+q)\cdots(1+q^n)},$$

$$\alpha_n = \left(1-q^{2n}\right) \sum_{0\le j\le n} \frac{(1-q)\cdots(1-q^{n+j-1})\,(-1)^{n-j} q^{\frac{1}{2}(n-j)(n-j+1)}\beta_j}{(1-q)\cdots(1-q^{n-j})}.$$

Wir erhalten dadurch eine Darstellung von f_0 in Abhängigkeit von α_n. Benutzen Sie diese Darstellung, um den Beweis von Satz 1 zu beenden (s. Lemma 7 in [1]).

Literatur

[1] G. Andrews, The fifth and seventh order mock theta functions, Trans. Amer. Math. Soc. **93**, 1986, 113–134.

[2] S. Zwegers, *Mock theta functions*, Ph.D. thesis, Utrecht University, 2002.