BEISPIEL DER VERVOLLSTÄNDIGUNG EINER MOCK-THETA-FUNKTION ([2], S. 189–190, [3], S. 24–26, [4] S. 17–18, [5], S. 8–17)

Ramanujan untersuchte die Funktion $\left(\tau \in \mathbb{H} = \left\{\tau \in \mathbb{C} \middle| \operatorname{Im}(\tau) > 0\right\},\ q = e^{2\pi i \tau}\right)$

$$f(\tau) = 1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{q^{n^2}}{(1+q)^2 \cdots (1+q^n)^2}.$$

Die Funktion f ist holomorph auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$. Gordon und McIntosh [1] gaben folgende Darstellung von f an:

$$f(\tau) = \frac{2}{\prod_{m \in \mathbb{N}} (1-q^m)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n q^{\frac{3n^2+n}{2}}}{1+q^n}. \tag{1}$$

Wir definieren die *Jacobische Thetareihe* $\vartheta(v;\tau)$, die *Dedekindsche η-Funktion* $\eta(\tau)$ sowie *Zwegers' μ-Funktion* $\mu(u,v;\tau)$ wie folgt ($u, v \in \mathbb{C}$, $u, v \notin \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, $a = e^{2\pi i u}$, $b = e^{2\pi i v}$):

$$\vartheta(v;\tau) = \sum_{r \in \frac{1}{2}+\mathbb{Z}} (-1)^{r-\frac{1}{2}} b^r q^{\frac{r^2}{2}},$$

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n \in \mathbb{N}} (1-q^n),$$

$$\mu(u,v;\tau) = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{\vartheta(v;\tau)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n b^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{1-aq^n}.$$

Benutzen Sie folgende Umformulierung von Gleichung (1) ohne Beweis ([4], S. 17; [3], S. 41):

$$\frac{i}{2} q^{-\frac{1}{24}} f(\tau) = \frac{\eta(3\tau)^3}{\eta(\tau)\vartheta\left(\frac{3}{2};3\tau\right)} + q^{-\frac{1}{6}} \mu\left(\frac{3}{2}, -\tau; 3\tau\right) - q^{-\frac{1}{6}} \mu\left(\frac{3}{2}, \tau; 3\tau\right). \tag{2}$$

Die Funktionen ϑ, η und μ erfüllen folgende Transformationseigenschaften:

Satz 1. *Für $u, v \in \mathbb{C}$ und $\tau \in \mathbb{H}$ gilt:*

$$e^{-\frac{\pi i}{12}} \eta(\tau+1) = \eta(\tau) = (-i\tau)^{-\frac{1}{2}} \eta\left(-\frac{1}{\tau}\right), \tag{3}$$

$$\vartheta(v+1;\tau) = \vartheta(-v;\tau) = -\vartheta(v;\tau) = e^{\pi i \tau + 2\pi i v} \vartheta(v+\tau;\tau), \tag{4}$$

$$e^{-\frac{\pi i}{4}} \vartheta(v;\tau+1) = \vartheta(v;\tau) = i(-i\tau)^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi i v^2 \frac{1}{\tau}} \vartheta\left(\frac{v}{\tau}; -\frac{1}{\tau}\right), \tag{5}$$

$$-\mu(u+1,v;\tau) = \mu(v,u;\tau) = \mu(u,v;\tau) = -a^{-1} b q^{-\frac{1}{2}} \mu(u+\tau,v;\tau) + a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{8}}, \tag{6}$$

(7)

$$e^{\frac{\pi i}{4}} \mu(u,v;\tau+1) = \mu(u,v;\tau) = -(-i\tau)^{-\frac{1}{2}} e^{\pi i (u-v)^2 \frac{1}{\tau}} \mu\left(\frac{u}{\tau}, \frac{v}{\tau}; -\frac{1}{\tau}\right) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pi i x^2 \tau - 2\pi x (u-v)}}{\cosh(\pi x)} dx.$$

Beweisen Sie die Transformationsgesetze (3) (s. [2], S. 189–190), (6) (s. [5], S. 8–10) und (7) (s. [5], S. 8–10). Da Thetareihen und deren Transformationsgesetze bereits Gegenstand des zweiten Vortrages waren, brauchen Sie die Funktionalgleichungen (4) und (5) nicht mehr zu beweisen.

Indem man Gleichung (3) sowie die Tatsache benutzt, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ von $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ erzeugt wird, kann man zeigen, dass für alle $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt:

$$\eta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \chi\left(\gamma\right)\left(c\tau+d\right)^{\frac{1}{2}}\eta(\tau). \tag{8}$$

Hierin ist $\chi(\gamma)$ eine Einheitswurzel. Eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{H}$ mit $\lim_{\tau\to i\infty}|f(\tau)| < \infty$ und $\lim_{\varepsilon\to 0}|f(r+i\varepsilon)| < \infty$ für beliebiges $r \in \mathbb{Q}$, die für alle $\gamma \in \Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ Gleichung (8) erfüllt, nennen wir eine *Modulform vom Gewicht $\frac{1}{2}$ mit Multiplikatorensystem χ zu Γ.*

Aus Satz 1 kann man zeigen, dass die Funktion $F(\tau) = \frac{i}{2}q^{-1}f(24\tau)$ nach Addition einer geeigneten (nicht-holomorphen) Korrektur-Funktion das Transformationsverhalten einer Modulform vom Gewicht $\frac{1}{2}$ mit gewissem Multiplikatorensystem zu

$$\Gamma_0\left(576\right) = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}\right) \middle| c \equiv 0 \pmod{576}\right\}$$

besitzt. Hierzu betrachten wir Zwegers' Vervollständigung von $\mu(u,v;\tau)$.

Zwegers konstruierte in seiner Dissertation ([5], S. 11) die Funktion ($z \in \mathbb{C}$)

$$R\left(z;\tau\right) = \sum_{r\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}} (-1)^{r-\frac{1}{2}}\left(\operatorname{sgn}(r) - E\left(\left(r + \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Im}(\tau)}\right)\sqrt{2\operatorname{Im}(\tau)}\right)\right)e^{-2\pi irz}q^{-\frac{r^2}{2}},$$

$$E(z) = 2\int_0^z e^{-\pi u^2}du.$$

Die *vervollständigte μ-Funktion*

$$\widehat{\mu}(u,v;\tau) = \mu(u,v;\tau) - \frac{1}{2}R(u-v;\tau)$$

besitzt folgende Transformationseigenschaft ([5], Theorem 1.11, S. 15):

Satz 2. *Es sei $u,v \in \mathbb{C}, \tau \in \mathbb{H}, k,\ell,m,n \in \mathbb{Z}$ und $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Dann gilt:*

$$\widehat{\mu}(u+k\tau+\ell, v+m\tau+n;\tau) = (-1)^{k+\ell+m+n}e^{\pi i(k-m)^2\tau+2\pi i(k-m)(u-v)}\widehat{\mu}(u,v;\tau), \tag{9}$$

$$\widehat{\mu}\left(\frac{u}{c\tau+d}, \frac{v}{c\tau+d}; \frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \chi\left(\gamma\right)^{-3}\left(c\tau+d\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\pi ic\frac{(u-v)^2}{c\tau+d}}\widehat{\mu}(u,v;\tau). \tag{10}$$

Wir definieren nun die Vervollständigung $\widehat{F}$ der Funktion $F(\tau)$:

$$\widehat{F}(\tau) = F(\tau) - q^{-4}R\left(\frac{3}{2} + 24\tau; 72\tau\right).$$

Aus Satz 2 erhalten wir schließlich folgenden Satz, den Sie angeben aber nicht beweisen sollen (hierin sei $\psi\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \chi\left(\begin{smallmatrix} a & 24b \\ c/24 & d \end{smallmatrix}\right)$):

Satz 3. *Für $\tau \in \mathbb{H}$ und $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0\left(576\right)$ gilt:*

$$\widehat{F}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \psi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left(c\tau+d\right)^{\frac{1}{2}}\widehat{F}(\tau).$$

Literatur

[1] B. Gordon und R. McIntosh, *Modular transformations of Ramanujan's fifth and seventh order mock theta functions*, Ramanujan J. **7**, 2007, 193–222.
[2] M. Koecher und A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
[3] K. Ono, The web of modularity: Arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series, CBMS regional conference series in mathematics **102**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
[4] D. Zagier, *Ramanujan's mock theta function and their applications,* Sem. Bourbaki **60**, 2007, no. 986.
[5] S. Zwegers, *Mock theta functions*, Ph.D. thesis, Utrecht University, 2002.